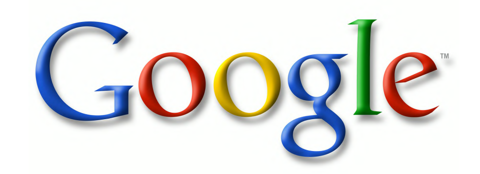



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907461 9

INTRODUCCIÓN

AL

ESTUDIO DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

ESTUDIOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO—I

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO

DE LAS

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

POR

LUIS OCTAVIO DE TOLEDO
Catedrático de Análisis matemático, por oposición,
en la Universidad Central

MADRID
LIBRERÍA DE LA VDA. É HIJOS DE MURILLO
ALCALÁ, 7

1907

ERRATAS

Se suplica al lector corrija las siguientes erratas que en la impresión se han deslizado:

Pág.	Línea.	Dice.	Debe decir.
38	22	$\left\{ \begin{matrix} mayor \\ menor \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} menor \\ mayor \end{matrix} \right\}$
52	14	$e^{z_1} + e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$	$e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
71	14	$dz = dx + , dy$	$dz = dx + i \, dy$

72	2	$\frac{du}{dz}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{dz}{dt}+\cdots$	$\frac{du}{dt}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{dz}{dt}+\cdots$
75	13	Falta el factor i en el término $-\frac{\partial H}{\partial \alpha}$	
111	5	$\lvert f(x) \rvert$	$\lvert f(z) \rvert$
111	7	$\int_{hnk} - f(z)dz \rvert$	$\int_{hnk} \lvert f(z)dz \rvert$
118	13	$\int_{s_0}^{n} f(z)dz$	$\int_{s_0}^{s_n} f(z)dz$
122	9	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(a+\rho e^{\theta i})d\theta$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{\theta i})d\theta$
125	4	$\frac{1.2}{2\pi i}\int_L f(z)(\varepsilon-a)^{-3}dz$	$\frac{1.2}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a)^{-3}dz$

MADRID.—IMPR. DE FORTANET, LIBERTAD, 29, TELÉF.° 991

72	2	$\frac{du}{dz}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{dx}{dt}+\dots$	$\frac{du}{dt}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}+\dots$
75	13	Falta el factor i en el término $-\frac{\partial H}{\partial \alpha}$	
111	5	$\lvert f(x)\rvert$	$\lvert f(z)\rvert$
111	7	$\int_{hnk}-f(z)dz\,\rvert$	$\int_{hnk}\lvert f(z)dz\rvert$
118	13	$\int_{s_0}^{n} f(z)dz$	$\int_{s_0}^{s_n} f(z)dz$
122	9	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(a+\rho e^{\theta i})d\theta$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{\theta i})d\theta$
125	4	$\frac{1.2}{2\pi i}\int_L f(z)(\varepsilon-a)^{-3}dz$	$\frac{1.2}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a)^{-3}dz$

MADRID.—IMPR. DE FORTANET, LIBERTAD, 29, TELÉF.° 991

PRÓLOGO

El objeto que nos proponemos con la publicación de estos *Estudios de Análisis matemático* es el de vulgarizar el conocimiento de una multitud de teorías de esta rama de la Matemática, que tanto por no exigirse en los cursos de nuestras Universidades y Escuelas especiales, cuanto por tratarse incidental y poco sistemáticamente en la mayoría de las obras matemáticas que circulan en nuestro país son en éste poco conocidas y cultivadas.

Comenzamos esta publicación con este pequeño estudio de las funciones de variable compleja, tanto por la belleza propia de la teoría, cuanto porque su estudio ha de servir de base indispensable para algunos otros de los que pensamos publicar. La mayoría de las obras que de esta materia se ocupan son unas, como las de Bianchi, Casorati, Forsyth, Foüet, Pincherle, etc., demasiado extensas y suponen en el lector conocimientos que una buena parte de los estudiantes españoles no poseen; y otras, como la gran obra de Briot y Bouquet, los Tratados de Análisis de

Gomes Teixeira, Goursart, Jordan, Laurent y Picard, el *Curso* de Hermite y la *Nueva Enciclopedia matemática* de nuestro querido amigo y compañero don Zoel García de Galdeano, tienen fines y objetos muy distintos, y en ellas lo principal no es la teoría de funciones de variable compleja, sino que esta teoría sirve de medio de preparación para la exposición de otras que en ella encuentran sólido fundamento. Una obra en que se expongan en pocas páginas los fundamentos y principales propiedades de las funciones de variable compleja no la conocemos, si existe, y á llenar ese vacío tiende este modesto trabajo.

En una obra de esta índole no debe buscar el lector originalidad, ni yo la pretendo, sino resumen y compendio de lo expuesto en otros libros; y por muy satisfecho me daría si hubiera conseguido exponer estos principios con claridad y orden, pues tengo la evidencia de que en tal caso los lectores se aficionarían á este estudio y acometerían el de las obras que más adelante citamos, y que nos han servido para redactar el presente trabajo, y procurarían satisfacer el anhelo de conocer cuantos resultados se han obtenido en esta bellísima teoría del Análisis matemático.

Gracia esperamos del público ilustrado, ya que no por el mérito de nuestros trabajos, que ninguno tienen, por la intención que al redactarlos nos ha guiado.

OBRAS CONSULTADAS

1.—*Bianchi (L.)*—Lezioni sulla Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche. Pisa, 1901. 1 vol. 4.°

2.—*Briot et Bouquet.*—Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques. Paris, 1859.—1 vol. 8.°

3.—*Briot et Bouquet.*—Théorie des fonctions elliptiques. 2.ª ed. Paris, 1875.—1 vol. 4.°

4.—*Casorati (F.)*—Teorica delle funzioni di variabili complesse. Pavía, 1868.—1 vol. 8.°

5.—*Cauchy (A. L.)*—Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Œuvres de Cauchy. IIe série. Tome III. Paris, 1897.—1 vol. 4.°

6.—*Cauchy (A. L.)*—Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. Paris, 1825.—1 foll. 4.°

7.—*Forsyth (A. R.)*—Theory of functions of a complex variable. Cambridge, 1893.—1 vol. 4.°

8.—*Foüet (E.-A.)*—Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Paris, 1902-4.—1 vol. 8.°

9.—*García de Galdeano (Z.)*.—Principios generales de la teoría de las funciones. Tomo v de la *Nueva enciclopedia matemática.* Zaragoza, 1904.—1 vol. 8.°

10.—*Gomes Teixeira (F.)*—Curso de Analyse infinitesimal. 2.ª ed. del vol. I y 1.ª de los II y III. Porto, 1890-1889-1892.—3 vol. 4.° men.

11.—*Gomes Teixeira (F.)*—Obras sobre Mathematica. Vol. I. Coimbra, 1904.—1 vol. 4.° may.

12.—*Goursat (E.)*—Cours d'Analyse Mathématique. Paris, 1902-5.—2 vol. 8.°

13.—*Hermite (Ch.)*—Cours. Redigé en 1882 par M. Andoyer. 4.ª ed. Paris, 1891.—1 vol. 4.° lit.

14.—*Hoüel (J.)*—Cours de Calcul infinitésimal. Paris, 1878 á 1881.—4 vol. 8.°

15.—*Jordan (C.)*—Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. 1.ª ed. Paris, 1882 á 1887. 3 vol. 8.°—2.ª ed. Paris, 1893 á 1896.—3 vol. 8.°

16.—*Laurent (H.)*—Traité d'Analyse. Paris, 1885 á 1891.—7 vol. 8.°

17.—*Mansion (P.)*—Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1885-86.—1 foll. 8.°

18.—*Merriman (M.)* and *Woodward (R. S.)*—Higher Mathematics. Cap. V-VI. New-York, 1896.—1 vol. 4.° men.

19.—*Pascal (E.)*—Repertorio di Matemetiche superiori. I. Analisi. Milano, 1898.—1 vol. 12.° (Manuali Hoepli).

20.—*Picard (E.)*—Traité d'Analyse. Paris, 1891-93-96.—3 vol. 8.°

21.—*Pincherle (S.)*—Lezioni sulla Teoria delle funzioni analitiche. Bologna, 1899-900.—1 vol. 4.° lit.

22.—*Riemann (B.)*—Œuvres mathématiques. Traduites par L. Laugel. Paris, 1898.—1 vol. 8.°

23.—*Vivanti (G.)*—Teoria delle funzioni analitiche. Milano, 1901.—1 vol. 12.° (Manuali Hoepli).

24.—*Whittaker (E. T.)*—A course of modern analysis. Cambridge, 1902.—1 vol. 4.°

Nota.—Cuando en el texto de la obra hagamos referencia á alguna de las anteriores, nos limitaremos á citar el nombre del autor seguido del número de orden que lleve en la lista anterior.

Introducción al estudio de las funciones de variable compleja.

CAPÍTULO PRIMERO

Primeras nociones.

1. Variable compleja.—Se llama *número imaginario* ó *complejo*, todo número de la forma $a + b\sqrt{-1}$, en el cual a y b son números reales cualesquieras. Aunque las expresiones de esta forma no tienen por sí mismas significación concreta bien determinada, se les aplica las reglas ordinarias del cálculo aritmético (*), conviniendo en reemplazar siempre el símbolo $(\sqrt{-1})^2$ por -1. De ahora en adelante emplearemos siempre la notación de Gauss, haciendo

$$\sqrt{-1} = i,$$

y por tanto, $i^2 = -1$.

Designando por r un número real positivo, y por α un cierto ángulo, puede hacerse

$$\left.\begin{array}{l} a = r.\cos.\alpha \\ b = r.\text{sen}.\alpha \end{array}\right\}, (1) \qquad \text{pues de aquí se deduce} \qquad \left.\begin{array}{l} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \text{áng. tg.} \dfrac{b}{a} \end{array}\right\}, (2)$$

(*) El autor supone conocida por el lector la materia expuesta en los n[illegible] 355 de su obra: *Elementos de Aritmética universal*, 2.ª edición.

y, por tanto, el número complejo dado tomará la forma

$$a + bi = r\,(\cos.\ \alpha + i\ \mathrm{sen.}\ \alpha),$$

en la cual r recibe el nombre de ***módulo*** y α el de ***argumento***. En virtud de las fórmulas (2), el valor de r está perfectamente determinado, pues se toma siempre el valor absoluto de $\sqrt{a^2 + b^2}$; pero α admite una infinidad de valores que forman una progresión aritmética cuyo primer término es el valor $\alpha_1 < 2\pi$ que satisface á la segunda de las igualdades (2), y cuya razón es 2π; así que los valores del argumento tienen la forma $\alpha = \alpha_1 + 2k\pi$, siendo k un número entero cualquiera, positivo ó negativo.

Todo número imaginario puede representarse geométricamente en un plano por el punto cuyas coordenadas cartesianas rectangulares sean a la abscisa y b la ordenada, ó cuyas coordenadas polares sean r y α. Cauchy llamaba *afijo* de un punto del plano al número complejo que le representaba, y esta denominación, que utilizaremos con frecuencia, se ha hecho recíproca, aplicándola indistintamente á los números con relación á los puntos, ó á los puntos con relación á los números.

Un número complejo $z = x + yi$, en el cual x é y son dos variables reales independientes ó no, recibe el nombre de ***variable compleja***. El conjunto de valores que la variable z puede recibir, toma el nombre de ***campo de variabilidad*** de esta variable; el campo de variabilidad de una variable compleja z está constituído por el conjunto de los campos de variabilidad de las variables reales x é y que la integran. Es evidente que una variable compleja $z = x + yi$ puede tomar también la forma $z = \rho\,(\cos.\ \alpha + i\ \mathrm{sen.}\ \alpha)$, en la cual ρ y α son cantidades variables reales, de las cuales la primera es esencialmente positiva.

Si en la expresión de una variable compleja $z = x + yi$, las variables x é y tienden, respectivamente, á los límites a y b, la expresión $a + bi$ se considera como el límite hacia el cual converge z.

Una cantidad imaginaria se dice que es ***indefinidamente pequeña*** cuando tiende hacia el límite cero, lo cual supone,

sentido *directo* ó *positivo;* y si se recorre en sentido opuesto, se dirá que se recorre en sentido *retrógrado* ó *negativo.* Esta convención la mantendremos en todo este trabajo.

Designemos por A el área que representa el campo de variabilidad de $z = x + yi$, y sea $a = a_1 + a_2 i$ un punto contenido en el interior de A: haciendo centro en a, tracemos una circunferencia de radio r, finito ó indefinidamente pequeño, que esté contenida por completo en A, el conjunto de puntos del plano situados en el interior de esa circunferencia se denomina *el dominio,* ó *contorno,* del punto a; y es evidente que r podrá ser lo suficientemente pequeño para que todos los puntos del *dominio* de a satisfagan á la condición de que

$$| z - a | < \varepsilon,$$

siendo ε un número positivo tan pequeño como queramos.

3. Función de variable compleja.—Si dos variables imaginarias u y z están enlazadas de tal modo que toda variación ó cambio de valor de una de ellas entrañe una variación ó cambio de valor de la otra, se dirá que estas variables son *funciones* una de otra: en particular, diremos, por ejemplo, que *u es una función de z*, y expresaremos esta dependencia por el signo ordinario $u = f(z)$. En el estudio que vamos á realizar supondremos siempre que la función $f(z) = f(x + yi)$ es de tal naturaleza, que en ella podemos separar la parte real de la imaginaria, reduciéndose á la forma,

$$u = f(z) = f(x + yi) = X + Yi,$$

representando X é Y dos funciones reales de las variables x é y. Si la variable z toma la forma $z = \rho\,(\text{cos.}\,\alpha + i\ \text{sen.}\,\alpha)$, la función u se presentará bajo la forma,

$$u = f(z) = f[\rho\,(\text{cos.}\,\alpha + i\,\text{sen.}\,\alpha)] = X + Yi,$$

y X, Y serán entonces funciones reales de las variables ρ y α.

Varias de las definiciones dadas en los tratados de Álgebra y Análisis para las funciones de variable real, pueden extenderse sin inconveniente alguno á las de variable imaginaria.

Así, por ejemplo, una función de variable compleja diremos que es *uniforme* cuando á cada valor de la variable corresponde un solo valor bien determinado de la función; diremos que es *multiforme* cuando á cada valor de la variable correspondan varios valores bien determinados de la función; y que es *infinitiforme* cuando á un valor de la variable corresponda un número ilimitado de valores bien determinados de la función.

Una función $u = f(z)$ está *definida* ó *determinada* en el interior de un contorno cerrado A, si á todo valor de z contenido en el interior de este contorno corresponde un valor único y bien determinado de u, cualquiera que sea el medio de determinarlo. Una función $u = f(z)$ se dice que es *finita* en el interior de un contorno cerrado A, si existe un número positivo H tal, que los módulos de los valores de la función correspondientes á valores de z contenidos en el interior del contorno satisfacen siempre á la condición.

$$|f(z)| < H.$$

Es evidente que si una función es finita en el interior de un contorno, su módulo admitirá en él un *límite superior* M, es decir, que existirá un número M que no podrá ser excedido por ningún valor del módulo de la función correspondiente á valores de la variable comprendidos en el interior del contorno, y tal, que cualquier otro número inferior á M podrá ser excedido por uno ó varios de los referidos valores del módulo; y admitirá también un *límite inferior* m, es decir, que existirá un número m inferior á todos los valores del módulo de la función correspondientes á valores de la variable comprendidos en el interior del contorno, y tal, que cualquier otro número superior á m será mayor que uno ó varios de los referidos valores del módulo de la función. La diferencia M-m recibe el nombre de *oscilación* de la función en el interior del contorno considerado.

4. Funciones continuas.—Sea $u = f(z)$ una función de la variable z perfectamente definida en el interior de un contorno A; si esta función es tal que designando por z_1 y z_2

dos valores de z contenidos en el interior de A, se verifica que

$$\text{lím.}\ |f(z_1)-f(z_2)|=0, \tag{1}$$

al mismo tiempo que lím. $|z_1-z_2|=0$, $f(z)$ ***se dice que es una función continua de z en el interior del contorno*** A: esta definición equivale á decir que, si para todo valor de z contenido en A, z_1 por ejemplo, á cualquier número positivo ε tan pequeño como se quiera, se le puede hacer corresponder otro número positivo η tal que se tenga

$$|f(z_1+h)-f(z_1)|<\varepsilon \tag{2}$$

siempre que $|h|<\eta$, la función $f(z)$ es continua en el interior del contorno A.

Para que las condiciones (1) ó (2) tengan lugar es evidente que, puesta la función $u=f(z)$ bajo la forma $X+Yi$, es necesario que X é Y sean funciones continuas de las variables reales x é y; y esta condición necesaria es también suficiente, puesto que, si X é Y son funciones continuas de x é y, se tendrá, suponiendo

$$f(z_1)=X_1+Y_1 i, \qquad f(z_2)=X_2+Y_2 i,$$
$$|f(z_1)-f(z_2)|=|X_1-X_2+i(Y_1-Y_2)|,$$

cantidad que tiende hacia cero al mismo tiempo que

$$|z_1-z_2|.$$

Por un procedimiento idéntico al empleado en la teoría de funciones de variable real podría demostrarse que la suma general y el producto de un número finito de funciones de una variable imaginaria continuas en el interior de un cierto contorno, es una función continua de la variable en el interior del mismo contorno; que el cociente de dos funciones continuas de una variable es también función continua de la misma, excepto para aquellos puntos que anulen á la función divisor, etc. La sencillez de estas demostraciones nos induce á omitirlas.

Como ejemplo de función continua presentaremos, por

ser el más sencillo de todos, el de la función potencial de exponente entero y positivo z^m. Esta función es, efectivamente, continua, pues se tiene

$$u = z^m = (x + yi)^m =$$
$$x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} yi - \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 - \binom{m}{3} x^{m-3} y^3 i + \ldots;$$

y como las funciones

$$X = x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \ldots,$$
$$Y = \binom{m}{1} x^{m-1} y - \binom{m}{3} x^{m-3} y^3 + \ldots,$$

son continuas para todos los valores finitos de x é y, la función u es continua para todo valor finito de z.

5. Representaciones geométricas.—Supongamos sea $u = f(z) = X + Yi$ una función de la variable imaginaria $z = x + yi$; hemos dicho (n.° 1) que el campo de variabilidad de z puede representarse por el conjunto de puntos de un plano que tienen por coordenadas cartesianas, referidas á un sistema de ejes rectangulares ox, oy (fig. 1) los valores que pueden asignarse á x é y: pues bien, si en el

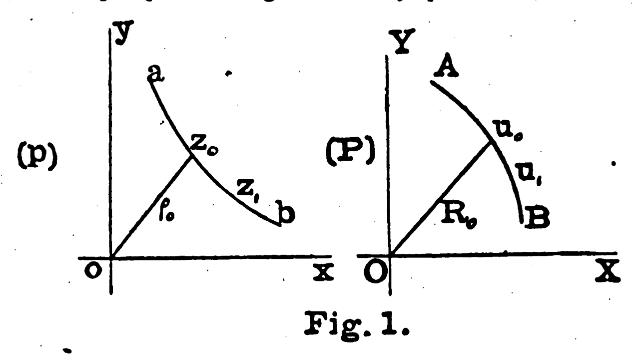


Fig. 1.

mismo plano (p) ó en otro (P) tomamos los valores de X é Y como coordenadas cartesianas de puntos referidos á otro sistema de ejes rectangulares OX, OY; á cada punto del pla-

no p corresponderán uno ó varios puntos en el P, según que u sea ó no función uniforme, por ejemplo, al z_0 el u_0, al z_1 el u_1, etc.; en general, al conjunto de puntos del plano p que representan los valores de z, corresponderá un conjunto de puntos en el plano P que representarán los valores correspondientes de la función u.

Si la función u es continua cuando el punto z recorra una cierta curva ab, el punto u describirá otra cierta curva AB; y cuando z recorra una cierta área c el punto u describirá también otra cierta área C.

Si la variable z se presenta bajo la forma módulo-argumental $z = \rho(\cos.\alpha + i\,\text{sen.}\,\alpha)$, y la función

$$u = f(z) = X + Yi$$

se presenta bajo la misma forma, como se tiene

$$|u| = \sqrt{X^2 + Y^2} = R, \qquad \arg.u = \Lambda = \text{áng.tg.}\frac{Y}{X},$$

á cada valor de ρ y α corresponderán valores de R y Λ perfectamente determinados; á cada punto z_0 corresponderán uno ó varios puntos u_0, según que u sea ó no función uniforme; y si $u = f(z)$ es función continua, cuando el extremo del radio vector ρ describa una curva ab, el extremo de R describirá también otra cierta curva, etc. Gauss llamaba á la curva descrita por el punto función *imagen* de la descrita por el punto variable.

La representación geométrica que acabamos de explicar ofrece ventajas grandísimas, alguna de las cuales haremos notar más adelante, y será la única que utilizaremos en este trabajo, pero existe otra propuesta por Briot y Bouquet, si no estamos equivocados, que en ocasiones presenta también ventajas muy notables. Consiste la representación de Briot en utilizar el plano ordinario para la representación de los valores de la variable $z = x + yi$, y tomar los valores de X é Y en una recta perpendicular al plano de las z, de manera que, supuesta uniforme la función $u = f(z) = X + Yi$, á cada valor de z corresponden en esa perpendicular dos puntos, uno al valor de X y otro al de Y; suponiendo que u es una

función continua y que z recorre una curva en su plano, los puntos X é Y describirán dos curvas en el espacio, y si z recorre un área plana, X é Y describirán dos hojas de superficie en el espacio, y el conjunto de esas dos hojas de superficie indicará las variaciones de la función u.

6. Funciones monodromas y polidromas: ejemplos.—Dada una función continua $u=f(z)$, supongamos que el punto variable z esté sujeto á permanecer en una cierta área determinada; si todos los caminos que puede recorrer z al marchar de un punto inicial z_0 á otro punto cualquiera del área z_1 conducen al mismo valor final de la función, diremos que u es una función *monodroma*, según Cauchy, ó *monotropa*, según Briot y Bouquet, en esta área. Esta noción coincide con la ya definida de función uniforme.

Si $u=f(z)$ es una función monodroma en el área A (figura 2), es evidente que si el punto z describe una curva cerrada situada en el interior de A, la función vuelve á tomar su valor primitivo al llegar z al punto de partida. Y, recíprocamente, si la función goza de esta propiedad, es monodroma. Consideremos, en efecto, los dos caminos $z_0 a z_1$ y $z_0 b z_1$ que van de z_0 á z_1; sea u_0 el valor inicial de la función u, u_1 el valor que adquiere al llegar á z_1 cuando se sigue el camino $z_0 a z_1$, continuando después por el camino $z_1 b z_0$, se llega á z_0 con el valor u_0, por hipótesis: si ahora se retrocede siguiendo la línea $z_0 b z_1$, la función volverá á pasar por los mismos valores en cada punto, y, por consiguiente, adquirirá en z_1 el valor u_1 antes obtenido, luego u es una función monodroma.

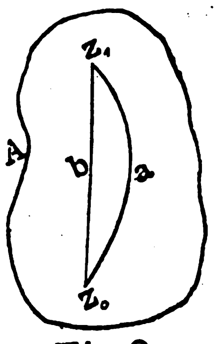


Fig. 2.

Por el contrario, si la función $u=f(z)$ es susceptible de tomar en cada punto del plano contenido en una cierta área, valores diferentes dependientes del camino que la variable

siga al llegar á él desde un punto inicial, la función recibe el nombre de *polidroma* ó *politropa*. Esta noción coincide con la de función multiforme anteriormente definida.

Siguiendo la nomenclatura adoptada más frecuentemente, emplearemos las palabras *monodroma* y *politropa* para designar las dos clases de funciones que acabamos de definir.

Los ejemplos que siguen, tomados de las obras de Hermite (13) y de Briot y Bouquet (3), dan clara idea de la diversa naturaleza de las funciones monodromas y politropas.

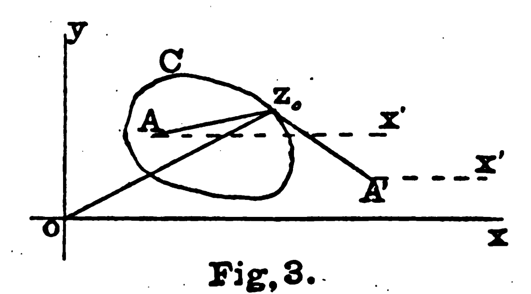
Ejemplo I.—Estudiemos primero el caso más sencillo posible, la función

$$u = z - a$$

en la cual, suponiendo $a = a_1 + a_2 i$ y $z = x + y\,i$, se tendrá

$$u = x - a_1 + i\,(y - a_2) = x' + y'\,i,$$

si hacemos $x' = x - a_1$, $y' = y - a_2$. Sean A y z (fig. 3) los



Fig, 3.

puntos que representan á a y z, respectivamente; es evidente que si hacemos

$$u = R\,(\cos.\,\varphi + i.\,\text{sen.}\,\varphi)$$

se tiene

$$\left.\begin{matrix} zA \\ zA' \end{matrix}\right\} = R, \qquad \left.\begin{matrix} zAx' \\ zA'x' \end{matrix}\right\} = \varphi.$$

Esto supuesto, admitamos, en primer lugar, que z recorre una curva en cuyo interior se encuentra el punto A; enton-

... y ...
... X ... Y ... descri...
... área plana ...
... plano, y ...
... recorrerá los vari...

6. Funciones m... ejemplos. Dada una ... el punto varia... área determina... al marchar ... del área z_1 ... diremos que ... *monótropa*. ... coincide ... es una ... evidente ... en ... vuelve ... Ilega ... recíproca... propi... ... valor ...

su valor inicial y el argumento será el mismo que tenía en el punto de partida, aumentado en $2k\pi$, y, por consiguiente, la función u tomará su valor, y es, por tanto, monodroma. Este resultado, descubierto por Cauchy, lo utilizaremos más adelante en otra forma.

Ejemplo II.—Consideremos ahora la función

$$u = \sqrt{z - a}.$$

Haciendo $z - a = r\,(\cos. \alpha + i \operatorname{sen.} \alpha)$, se tiene

$$u = [r(\cos. \alpha + i . \operatorname{sen.} \alpha)]^{\frac{1}{2}} =$$
$$r^{\frac{1}{2}}\left(\cos. \frac{\alpha + 2k\pi}{2} + i . \operatorname{sen.} \frac{\alpha + 2k\pi}{2}\right),$$

en cuya expresión k es un número entero cualquiera; los valores diferentes de u se obtienen haciendo $k = 0$ y $k = 1$: para $k = 0$ se obtiene

$$u_0 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos. \frac{\alpha}{2} + i . \operatorname{sen.} \frac{\alpha}{2}\right),$$

y para $k = 1$

$$u_1 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos. \frac{\alpha + 2\pi}{2} + i . \operatorname{sen.} \frac{\alpha + 2\pi}{2}\right) =$$
$$u_0(\cos. \pi + i . \operatorname{sen.} \pi) = - u_0.$$

Si z recorre un contorno cerrado C en cuyo interior no esté el punto A', afijo de a (fig. 3), los valores de r y α son los mismos iniciales cuando z vuelve al punto de partida, es decir, que partimos del valor u_0, por ejemplo, y llegamos al u_0; la función u es, por consiguiente, monodroma en la región del plano limitada por el contorno C.

Si z recorre un contorno cerrado C en cuyo interior está situado el punto A, afijo de a, el valor de r es el inicial cuando z vuelve al punto de partida; pero el de α viene aumentado en 2π, y, por consiguiente, el argumento de u vie-

ces el valor de R variará entre ciertos límites; pero al volver z al punto de partida el vector zA tendrá la misma magnitud que al comenzar el movimiento, y, por tanto, lo mismo le ocurrirá á R; pero el argumento φ partirá de un cierto valor φ_1, y al dar una vuelta al contorno C en sentido directo, llegaremos á z con el valor $\varphi_1 + 2\pi$; ahora bien, el valor de u será igual al que tenía en el punto de partida, y la función es monodroma. Lo mismo ocurre si el punto A está sobre el contorno; sólo que entonces al llegar z á este punto el argumento varía bruscamente en π, como es fácil ver haciendo la figura.

Si z recorre una curva en cuyo interior no esté el punto A, y supongamos ahora que A está en A', al dar z una vuelta al contorno en sentido directo el valor de R variará entre ciertos límites; pero al volver z al punto de partida el vector zA tendrá la misma magnitud que al comenzar el movimiento, y, por tanto, lo mismo le ocurrirá á R; el argumento φ partirá de un cierto valor φ_1; variará entre ciertos límites, y al dar una vuelta al contorno C llegaremos á z con el mismo valor φ_1 con que habíamos partido; el valor de u será el mismo que tenía en el momento de partida, y, por consiguiente, la función es monodroma.

Generalicemos el estudio anterior al de la función

$$u = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n).$$

Para ello, si hacemos

$$\left.\begin{array}{l} z - a_1 = r_1 (\cos.\alpha_1 + i.\text{sen}.\alpha_1) \\ z - a_2 = r_2 (\cos.\alpha_2 + i.\text{sen}.\alpha_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z - a_n = r_n (\cos.\alpha_n + i.\text{sen}.\alpha_n) \end{array}\right\}$$
$$u = R(\cos.\varphi + i.\text{sen}.\varphi),$$

se deducirá inmediatamente

$$R = r_1 r_2 \dots r_n, \qquad \varphi = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Esto supuesto, cuando z recorre un contorno en cuyo interior existan k puntos a ($k \gtreqless n$) el módulo de u recobrará

su valor inicial y el argumento será el mismo que tenía en el punto de partida, aumentado en $2k\pi$, y, por consiguiente, la función u tomará su valor, y es, por tanto, monodroma. Este resultado, descubierto por Cauchy, lo utilizaremos más adelante en otra forma.

Ejemplo II.—Consideremos ahora la función

$$u = \sqrt{z - a}.$$

Haciendo $z - a = r(\cos.\alpha + i\,\text{sen.}\,\alpha)$, se tiene

$$u = [r(\cos.\alpha + i.\text{sen.}\alpha)]^{\frac{1}{2}} =$$

$$r^{\frac{1}{2}}\left(\cos.\frac{\alpha + 2k\pi}{2} + i.\text{sen.}\frac{\alpha + 2k\pi}{2}\right),$$

en cuya expresión k es un número entero cualquiera; los valores diferentes de u se obtienen haciendo $k = 0$ y $k = 1$: para $k = 0$ se obtiene

$$u_0 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos.\frac{\alpha}{2} + i.\text{sen.}\frac{\alpha}{2}\right),$$

y para $k = 1$

$$u_1 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos.\frac{\alpha + 2\pi}{2} + i.\text{sen.}\frac{\alpha + 2\pi}{2}\right) =$$

$$u_0(\cos.\pi + i.\text{sen.}\pi) = -u_0.$$

Si z recorre un contorno cerrado C en cuyo interior no esté el punto A', afijo de a (fig. 3), los valores de r y α son los mismos iniciales cuando z vuelve al punto de partida, es decir, que partimos del valor u_0, por ejemplo, y llegamos al u_0; la función u es, por consiguiente, monodroma en la región del plano limitada por el contorno C.

Si z recorre un contorno cerrado C en cuyo interior está situado el punto A, afijo de a, el valor de r es el inicial cuando z vuelve al punto de partida; pero el de α viene aumentado en 2π, y, por consiguiente, el argumento de u vie-

ne aumentado en π; por lo tanto, si partimos del valor u_0 llegaremos al u_1 y viceversa; luego la función es politropa en la región del plano limitada por el contorno C.

Las consideraciones anteriores pueden generalizarse á la función

$$u = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}\,.$$

Utilizando las notaciones empleadas en el ejemplo I, tendremos que si la variable z recorre un contorno en cuyo interior existen k puntos a ($k \overline{\lesseqgtr} n$), el módulo de u recobrará su valor inicial, y su argumento tendrá el valor inicial aumentado en $k\pi$; por consiguiente, la función tomará su valor inicial, ó un valor igual, pero de signo contrario, según que k sea un número par ó impar. La función, es, por consiguiente, $\left\{ \begin{matrix} \text{monodroma} \\ \text{politropa} \end{matrix} \right\}$ para todo contorno en cuyo interior exista un número $\left\{ \begin{matrix} \text{par} \\ \text{impar} \end{matrix} \right\}$ de raíces de la ecuación.

$$u^2 = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) = 0.$$

Ejemplo III.—Consideremos, por último, la función

$$u = (z - a)^{\frac{p}{q}},$$

en la que supondremos que p y q son números enteros primos entre sí. Haciendo $z - a = r\,(\text{cos.}\,\alpha + i.\,\text{sen.}\,\alpha)$, se tiene

$$u = [r(\text{cos.}\,\alpha + i.\text{sen.}\,\alpha)]^{\frac{p}{q}} =$$
$$r^{\frac{p}{q}}\left[\text{cos.}\,\frac{(\alpha + 2k\pi)p}{q} + i.\text{sen.}\,\frac{(\alpha + 2k\pi)p}{q}\right],$$

expresión en la cual k es un número entero cualquiera; los valores diferentes de u se obtienen haciendo

$$k = 0, 1, 2, \dots (q - 1);$$

hagamos

$$u_0 = r^{\frac{p}{q}}\left(\text{cos.}\,\frac{\alpha p}{q} + i.\text{sen.}\,\frac{\alpha p}{q}\right).$$

Cuando el punto z describe un contorno cerrado C en cuyo interior no esté el punto A', afijo de a (fig. 3), los valores de r y α son los mismos iniciales cuando z vuelve al punto de partida; y, por tanto, si partimos del valor u_0 de la función llegamos al mismo valor u_0: la función u es, por consiguiente, monodroma en la región del plano limitada por el contorno C.

Si el punto z describe un contorno cerrado en cuyo interior esté situado el punto A, afijo de a, el valor de r es el inicial cuando z vuelve al punto de partida; pero el de α viene aumentado en 2π, y. por consiguiente, si hemos partido del valor u_0 de la función u llegaremos al

$$u_1 = r^{\frac{p}{q}}\left(\cos.\frac{(\alpha+2\pi)p}{q} + i.\text{sen.}\frac{(\alpha+2\pi)p}{q}\right) =$$

$$u_0\left(\cos.\frac{2p\pi}{q} + i.\text{sen.}\frac{2p\pi}{q}\right).$$

Ahora bien; si designamos por β una raíz primitiva de la ecuación binomia $x^q = 1$, raíz que es, según se sabe, de la forma

$$\beta = \cos.\frac{2p\pi}{q} + i.\text{sen.}\frac{2p\pi}{q},$$

la expresión anterior se reduce á

$$u_1 = u_0\,\beta.$$

Si z diese una segunda vuelta al contorno C, se llegaría con el valor $u_2 = u_1 . \beta = u_0\,\beta^2$, y así sucesivamente hasta multiplicar u_0 por las q raíces de la ecuación binomia $x^q = 1$. La función u es, por consiguiente, politropa en el interior de todo contorno en cuyo interior esté situado el punto A.

El lector puede generalizar sin ninguna dificultad los resultados que preceden á la función

$$u = (z-a_1)^{\frac{p_1}{q_1}}(z-a_2)^{\frac{p_2}{q_2}}\ldots(z-a_n)^{\frac{p_n}{q_n}}$$

7. Areas conexas y lazos.—Un área plana se llama *conexa* (de un solo trozo) si tomados en ella dos puntos cualesquiera, *a* y *b*, se puede ir de *a* á *b* por líneas situadas por completo en el interior del área. Si en un área conexa se traza una línea que no se corte á sí misma y que enlace dos puntos del contorno, permaneciendo por completo en el interior, excepto sus extremos, se dirá que se ha hecho en el área un *corte simple*, ó *una cortadura*. En la nueva área que se obtiene, que será ó no conexa, los dos bordes ó labios de la cortadura se consideran como líneas diferentes sumamente próximas, y unidas al contorno primitivo forman parte del nuevo.

Un área se dice que es *simplemente conexa* cuando un corte simple rompe su conexión. Si, por el contrario, pueden darse en el área diversos cortes simples sin romper su conexión, el área se dice que posee una *conexión múltiple* ó que es *múltiplemente conexa*.

Es evidente que en un área plana limitada por un contorno único no se podrá verificar ninguna cortadura sin romper su conexión, y, por consiguiente, un área de esta naturaleza es siempre simplemente conexa. La proposición recíproca es verdadera también, pues si del contorno forman parte dos curvas cerradas diversas, *a* y *b*, un corte trazado de un punto de *a* á uno de *b* no rompe la conexión, pues si designamos este corte por *c*, sus dos bordes se unen con las curvas cerradas *a* y *b* en un único contorno nuevo, siguiendo el cual se puede ir de un punto de uno de los bordes *c* al punto opuesto situado sobre el otro borde por líneas situadas por completo en el interior del área. Por tanto, trazado el corte *c* no se rompe la conexión entre las dos regiones del área adyacentes á sus dos bordes, y podemos afirmar que:

Toda área plana de contorno único es simplemente conexa, y recíprocamente; y además, que: *en un área múltiplemente conexa, una cortadura que tenga sus extremos sobre dos contornos diversos no rompe la conexión, y hace que el número de contornos que la limitan disminuya en una unidad.*

Supongamos ahora que se tiene un área plana conexa

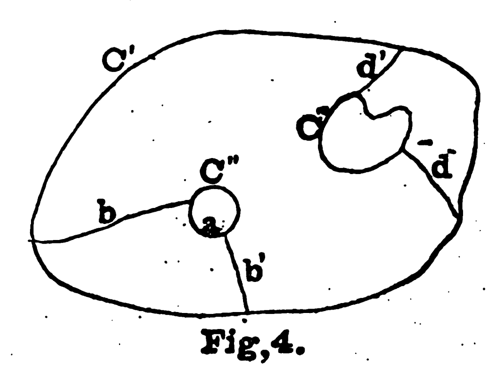
cuyo contorno esté formado por n curvas cerradas distintas, $C_1, C_2 \ldots C_n$. Tracemos en el área considerada un corte simple de C_1 á C_2, por ejemplo, la nueva área conexa tiene $n-1$ contornos diferentes: si en esta nueva área se traza un segundo corte que enlace puntos de dos contornos diversos, y repetimos una y otra vez esta operación en las diversas áreas que vamos obteniendo, al cabo de $n-1$ cortes, la superficie que se obtiene estará limitada por un solo contorno formado por los n primitivos enlazados entre sí por los $n-1$ cortes, y será, por consiguiente, un área simplemente conexa Por consiguiente: *un área plana conexa limitada por* n *contornos puede reducirse mediante* n—1 *cortes, que no rompan su conexión, á un área simplemente conexa:* un área de esta naturaleza se dice que es n veces conexa, ó *de orden* n *de conexión:* así que podemos decir que el *orden* de conexión de un área está determinado por el número de contornos diferentes que la limitan, ó también, por el número de cortaduras que la reducen á simplemente conexa, aumentado en una unidad. Las áreas simplemente conexas, se dice que son de orden *uno* de conexión.

Es evidente que los $n-1$ cortes que hacen simplemente conexa una área de orden n pueden adoptar posiciones muy diversas: así, en el área triplemente conexa limitada por los contornos C_1, C_2, C_3 (fig. 4) pueden darse los cortes b y d, ó los b' y d', para convertirla en simplemente conexa.

Por último, puede observarse que si en el interior de un área simplemente conexa se describe una curva cerrada A, que no tenga nodos, esta curva limita por sí misma un área que es también simplemente conexa; y, por el contrario, si en el interior de un área múltiplemente conexa se describe una curva cerrada sin nodos, el área limitada por esa curva será ó no simplemente conexa según que en su interior no estén, ó sí se hallen comprendidos, uno ó varios de los contornos que limitaban el área primitiva.

Lazos simples.—Cuando en el interior de un área conexa existen puntos aislados que por una causa cualquiera merecen un estudio especial, es muy frecuente rodear estos puntos por un círculo de radio finito, ó infinitamente peque-

ño, cuyo centro sea el punto considerado, y unir el contorno de este círculo al del área por medio de una cortadura; la figura constituída por el círculo y los dos labios ó bordes de



Fig, 4.

la cortadura ha recibido el nombre de *lazo simple:* así, en la figura 4, el punto *a* está envuelto por el lazo constituído por el círculo C_2, y la cortadura *b* ó la *b'*.

CAPÍTULO II

Series de términos imaginarios.

8. Definiciones.—Una sucesión ilimitada de números de la forma $a + bi$, que se forman por medio de una ley cualquiera, constituye una *serie de terminos imaginarios;* así, la sucesión

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) + \ldots = \sum_1^\infty (a_n + b_n i) \qquad (1)$$

constituye *una serie de términos imaginarios.* Si los términos de la serie (1) se presentan bajo su forma trigonométrica, ó módulo argumental, la serie (1) tomará la forma

$$r_1(\cos.\alpha_1 + i.\text{sen}.\alpha_1) + r_2(\cos.\alpha_2 + i.\text{sen}.\alpha_2) + \ldots + r_n(\cos.\alpha_n + i.\text{sen}.\alpha_n) + \ldots = \sum_1^\infty r_n(\cos.\alpha_n + i.\text{sen}.\alpha_n) \quad (2)$$

De igual manera que las series de términos reales, las de términos imaginarios se clasifican en *convergentes*, *divergentes* é *indeterminadas* ú *oscilantes*. Una serie de términos imaginarios se dice que es *convergente* si la suma de sus n primeros términos

$$S_n = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) \qquad (3)$$

tiende hacia un límite finito y perfectamente determinado al crecer n indefinidamente.

Una serie de términos imaginarios se dice que es *diver-*

gente si la suma de sus n primeros términos puede ser mayor que cualquier número dado al crecer n indefinidamente.

Y una serie de términos imaginarios se dirá que es *indeterminada* ú *oscilante* si la suma de sus n primeros términos ni tiende hacia un límite finito y determinado, ni crece ilimitadamente al crecer n indefinidamente.

Entre las varias proposiciones relativas á la exposición de los criterios que pueden adoptarse para el conocimiento de si una serie es ó no convergente, son fundamentales los que siguen.

9. Teorema I.—*Una serie de términos imaginarios es convergente, cuando las series formadas por sus partes reales y los coeficientes de* i *son á la vez convergentes.*

En efecto, si en la serie (1) suponemos que las dos series

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \qquad (4)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots, \qquad (5)$$

son convergentes y tienen como límites A y B respectivamente, es indudable que el límite ó suma de la (1) será $S = A + Bi$; puesto que tendremos

$$S_n = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \dots + (a_n + b_n i) =$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)i = A_n + B_n i,$$

y al crecer n indefinidamente

$$lím.\ S_n = lím.\ (A_n + B_n i) = lím.\ A_n + i.\, lím.\ B_n = A + Bi.$$

Si alguna de las series (4) y (5), ó ambas, fueran divergentes, el mismo razonamiento que precede nos haría ver que la serie (1) será también divergente. Y del mismo modo puede verse que si las series (4) y (5) son oscilantes, ó una de ellas es oscilante y la otra convergente, la (1) será también oscilante.

10. Teorema II.—*Una serie de términos imaginarios es convergente, si la serie formada por los módulos de sus términos es también convergente.*

En efecto, si suponemos $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, la convergencia de la serie

$$r_1 + r_2 + ... + r_n + ...$$

entraña la de las series (4) y (5), pues se tiene

$$| a_n | < r_n, \qquad | b_n | < r_n,$$

por consiguiente, las series (4) y (5) siendo convergentes, la propuesta también lo es.

Observación.—La condición expresada en el enunciado del teorema precedente es *suficiente* para la convergencia de la serie, pero no es *necesaria*, pues necesaria no lo es más que la contenida en el enunciado del teorema I. Así, por ejemplo, la serie

$$1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3} + \frac{i^3}{4} + \frac{i^4}{5} + ...,$$

obtenida multiplicando los términos de la serie armónica por las potencias sucesivas de i no satisface al teorema II, y sin embargo es convergente; en efecto, la serie dada puede ponerse bajo la forma

$$1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{3} - \frac{i}{4} + \frac{1}{5} + \frac{i}{6} - ... =$$

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} ...\right) + i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - ...\right),$$

y como en esta serie las partes reales y los coeficientes de i forman dos series convergentes, la propuesta también lo es.

11. Definiciones.—El carácter distintivo que señala el teorema II entre las series convergentes de términos imaginarios sirve para clasificarlas, de modo análogo á lo que se hace en las series de términos reales, en *series absolutamente convergentes*, que son aquellas en las cuales la serie formada por los módulos de sus diversos términos es convergente; y en *series semi-convergentes* ó *condicionalmente convergentes*, que son aquellas que, siendo convergentes, la serie formada por los módulos de sus términos no lo es. Se-

gún tendremos lugar de apreciar, las primeras tienen en el Análisis matemático, y en todas sus aplicaciones, mucha mayor importancia que las segundas.

12. Criterios de convergencia.—En general, puede decirse que á cada proposición que señala un criterio de convergencia en las series de términos reales corresponde otra análoga en las de términos imaginarios, sustituyendo la palabra *módulo* á la de *valor absoluto* de un término: como la mayoría de estas proposiciones tienen poca aplicación nos limitaremos á establecer algunas de que hemos de hacer uso frecuente. Antes de ello sentaremos algunas observaciones de sumo interés por lo que facilitan el conocimiento de la convergencia ó no convergencia de las series de términos imaginarios.

Observación I.—Según lo dicho en el teorema II y en las definiciones dadas en el n.º 11, *si la serie formada por los módulos de los términos de una serie de términos imaginarios es convergente, la serie dada es absolutamente convergente.*

Observación II.—Si la serie formada por los módulos de los términos de la propuesta es divergente, podrán ocurrir los casos siguientes:

a) Si el módulo del término general de una serie de términos imaginarios no tiene por límite cero, la serie no es convergente.

En efecto, refiriéndonos á la serie (1) de la hipótesis $lím. r_n = lím. \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \mp 0$, se deducen inmediatamente las dos condiciones, ó una al menos,

$$lím. a_n \mp 0, \qquad lím. b_n \mp 0,$$

y, por consiguiente, la serie de las a, la de las b, ó ambas, no pueden ser convergentes, y por tanto, tampoco lo es la propuesta.

b) Si el módulo del termino general de una serie de términos imaginarios crece ilimitadamente al crecer n *indefinidamente, la serie es divergente.*

Puesto que si $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ crece ilimitadamente

con n, también a_n, b_n, ó ambos, crecerán indefinidamente, y la serie de las a, la de las b, ó ambas, serán divergentes, y por lo tanto, también la propuesta.

La condición que precede es *suficiente*, pero no *necesaria*, porque alguna de las dos series de las a, de las b, ó ambas, pueden ser divergentes sin que sus términos generales, y por tanto, r_n crezca ilimitadamente con n.

c) Si el módulo del término general de una serie de términos imaginarios tiende hacia cero, la serie será condicionalmente convergente, ó divergente, pero nunca oscilante.

Puesto que si $lím. \, r_n = 0$, se tendrá

$$lím. \, | a_n | = 0, \qquad lím. \, | b_n | = 0,$$

y las series de las a y de las b serán ambas convergentes, ambas divergentes, ó una convergente y otra divergente; en el primer caso la propuesta será condicionalmente convergente, y en los otros dos divergente, pero nunca oscilante.

Observación III.—Si una serie de términos imaginarios es indeterminada ú oscilante, el módulo de su término general tiende hacia un límite finito y determinado distinto de cero.

En efecto, la oscilación de la serie (1) exige que las series (2) y (3) sean ambas oscilantes, ó una oscilante y otra convergente; y esta condición lleva consigo la de que los límites de a_n y de b_n deben ser ambos finitos y distintos de cero, ó uno igual y otro diferente de cero; de donde se deduce que el límite de r_n tiene que ser necesariamente finito y distinto de cero.

La condición que antecede es *necesaria*, pero no *suficiente*, pues siendo $lím. \, r_n$ finito y distinto de cero, lo mismo les ocurrirá á los límites de a_n, de b_n, ó ambos, y la serie de las a, la de las b, ó ambas, podrán ser divergentes, y en ta caso, también lo será la propuesta.

Caracteres de convergencia.—TEOREMA III.—*Si en una serie de términos imaginarios, el módulo de la razón de un término al que le precede tiende hacia un límite finito y determinado* λ, *cuando* n *crece ilimitadamente, la serie será absolutamente convergente si* $\lambda < 1$, *y divergente si* $\lambda > 1$.

. En efecto, sea la serie de términos imaginarios

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

si $lím. \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \lambda < 1$, la serie de los módulos es convergente, y, por tanto, la propuesta converge absolutamente. Si $lím. \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \lambda > 1$, la serie de los módulos es divergente, y como además $| u_n | > | u_{n-1} |$, el módulo del término general crece ilimitadamente, y la serie propuesta es divergente.

Si $lím. \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \lambda = 1$, nada puede afirmarse *à priori* acerca de la convergencia ó divergencia de la serie dada.

TEOREMA IV.—*Si en una serie de términos imaginarios, el módulo de* $\sqrt[n]{u_n}$ *tiende hacia un límite finito y determinado* λ *cuando* n *crece ilimitadamente, la serie será absolutamente convergente si* $\lambda < 1$, *divergente si* $\lambda > 1$, *y nada puede afirmarse si* $\lambda = 1$.

La demostración de esta proposición es idéntica á la del teorema anterior, y por eso la omitimos.

13. Propiedad importante.—*En una serie de términos imaginarios absolutamente convergente, se puede invertir el orden de sus términos sin alterar su convergencia.*

En efecto, si la serie

$$\sum_0^\infty (a_n + b_n i) = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + \dots + (a_n + b_n i) + \dots$$

es absolutamente convergente, las dos series

$$\sum_0^\infty | a_n | = | a_0 | + | a_1 | + \dots + | a_n | + \dots,$$

$$\sum_0^\infty | b_n | = | b_0 | + | b_1 | + \dots + | b_n | + \dots,$$

son convergentes, y en ellas puede alterarse el orden de colocación de los términos sin alterar su convergencia, pero esto equivale á decir que la propuesta seguirá siendo con-

vergente cualquiera que sea el orden de colocación de sus términos.

Observación.—Una serie de términos imaginarios condicionalmente convergente, puede, no sólo cambiar de límite, sino cesar de ser convergente cuando sus términos se alteren de lugar de modo conveniente. Esta observación, análoga á la hecha por Riemann (*) respecto á las series de términos reales, puede demostrarse de un modo análogo al teorema que precede.

14. Operaciones con series de términos imaginarios.—Teorema I.—*Si se multiplican los terminos de una serie de términos imaginarios absolutamente convergente por números positivos inferiores á un número dado, la serie obtenida es también absolutamente convergente.*

Sea la serie

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

y designemos por a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ..., números positivos inferiores á un número finito dado A. Por ser absolutamente convergente la serie dada, la de los módulos de sus términos

$$\sum_0^\infty |u_n| = |u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

también será convergente, y según una propiedad conocida de las series de términos reales, será también convergente la serie

$$\sum_0^\infty |a_n u_n| = |a_0 u_0| + |a_1 u_1| + \ldots + |a_n u_n| + \ldots,$$

y, por consiguiente, la serie

$$\sum_0^\infty a_n u_n = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + \ldots,$$

será absolutamente convergente, como se quería demostrar.

Teorema II.—*Si se suman término á termino dos ó más series convergentes de terminos imaginarios, cuyos límites sean*

(*) ...*matiques*, ·22). Páginas 234-235.

U, V, W, ..., *la serie obtenida es tambien convergente, y su límite será* V + U + W + ...

En efecto, sean las series convergentes, de términos imaginarios

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

$$\sum_0^\infty v_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots,$$

$$\sum_0^\infty w_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots,$$

cuyas sumas designaremos por U, V, W, y sea

$$\sum_0^\infty p_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n + \dots,$$

la serie cuyo término general es $p_n = u_n + v_n + w_n$. Designando por U_n, V_n, W_n la suma de los n primeros términos de las series propuestas, se tiene, por las hipótesis hechas,

$$lím.\ U_n = U, \qquad lím.\ V_n = V, \qquad lím.\ W_n = W,$$

y, por tanto,

$$lím.\ (U_n + V_n + W_n) = U + V + W,$$

y como el primer miembro de esta expresión es el límite de la suma de los n primeros términos de la serie $\sum_0^\infty p_n$, la proposición queda demostrada.

Teorema III.—*Si las dos series de términos imaginarios*

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots, \qquad (1)$$

$$\sum_0^\infty v_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots, \qquad (2)$$

son convergentes, y al menos una de ellas converge absolutamente, y tienen por sumas U *y* V *respectivamente, la serie*

$$\sum_0^\infty w_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots, \qquad (3)$$

cuyo termino general tiene por expresión

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_n v_0,$$

es también absolutamente convergente, y tiene por suma W *el producto* U.V *de las sumas de las dos series propuestas* (*).

Supongamos que la serie (1) es convergente y la (2) absolutamente convergente. Hagamos

$$U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \qquad V_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
$$U = U_n + r_n, \quad V = V_n + R_n, \quad W_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n.$$

Designemos por p la mitad de n, si n es par, ó la de $n - 1$, si n es impar. Se tiene idénticamente

$$U.V = v_0 U + v_1 U + \dots + v_n U + R_n U = v_0(U_n + r_n) + v_1(U_{n-1} + r_{n-1}) + \dots + v_n(U_0 + r_0) + R_n U = (v_0 U_n + v_1 U_{n-1} + \dots + v_n U_0) + v_0 r_n + v_1 r_{n-1} + \dots + v_n r_0 + R_n U.$$

El primer término del segundo miembro es W_n; y por consiguiente, se puede escribir

$$W_n = UV - (A_p + B_p + R_n U), \qquad (4)$$

si se hace

$$A_p = v_0 r_n + v_1 r_{n-1} + \dots + v_p r_{n-p},$$
$$B_p = v_{p+1} r_{n-p-1} + \dots + v_n r_0.$$

Llamemos r_α aquella de las cantidades $r_n, r_{n-1}, \dots r_{n-p}$ que tenga mayor módulo, y r'_α aquella de las cantidades $r_0, r_1, \dots r_{n-p-1}$, cuyo módulo sea también el mayor, se tendrá

$$|A_p| \leq |r_\alpha| (|v_0| + |v_1| + \dots + |v_p|),$$
$$|B_p| \leq |r'_\alpha| (|v_{p+1}| + |v_{p+2}| + \dots + |v_n|).$$

(*) La demostración de este teorema, debido á Cauchy y completado por Mertens, se debe á Jensen, y está traducida de la obra: MANSION (P.)— *Résumé du cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand.*—Paris. 1887, 1 vol. 8.°

[illegible] la serie [illegible] es absolutamente convergente, la serie [illegible] tiene una suma fini- ta [illegible] para $s = \infty$; por consiguiente

$$\text{lím.}\ [illegible] = T.$$

$$\text{lím.}\ [illegible] = [illegible]$$

Como la serie [illegible] es también convergente, [illegible] es también finito, así como [illegible], y además [illegible] tienen por límite cero para $s = \infty$, lo mismo que [illegible]. De aquí se deduce, por último, para $s = \infty$,

$$\text{lím.}\ [illegible] = 1 \qquad \text{lím.}\ [illegible] = 1$$

y como lím. T_s = [illegible], la igualdad (4.) da inmediatamente

$$\text{lím.}\ W_s = W = [illegible]\ T.$$

como se quería demostrar. Más adelante utilizaremos esta importantísima proposición.

CAPITULO III

Series de términos variables.

15. Definiciones.—En el Análisis se emplean con frecuencia series cuyos términos son funciones de una ó de varias variables. Refiriéndonos exclusivamente al caso de una variable, una serie de esta clase tendrá la forma

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \qquad (1)$$

en la cual $f_0(z), f_1(z), \dots f_n(z), \dots$ son funciones cualesquiera. Es evidente que las series de esta clase son verdaderas funciones de la variable z, definidas por la ley de formación y sucesión de sus términos. Supondremos nosotros que la variable z puede recibir valores cualesquiera reales ó imaginarios.

El conjunto de valores de la variable que hacen convergente á la serie (1), recibe el nombre de *campo de convergencia* de la serie, y es evidente que si estos valores se representan por puntos de un plano, el conjunto de estos puntos constituye el campo de convergencia de la serie.

Entre todas las series de la forma (1) las que ofrecen mayor interés son aquellas cuyos términos pueden ordenarse por las potencias ascendentes ó descendentes de la variable, es decir, las series de las formas

$$\sum_{0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \qquad (2)$$

$$\sum_{0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_n z^{-n} + \dots, \qquad (3)$$

en las cuales los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ son números finitos reales ó imaginarios, y serán las únicas que nosotros estudiemos. Como toda serie de la forma $\sum_0^\infty a_n z^{-n}$ puede transformarse en otra de la forma $\sum_0^\infty a_n z'^n$, con sólo hacer $z = \frac{1}{z'}$, sólo nos ocuparemos en el estudio de estas últimas. Lacroix llamaba *series ascendentes* á las de la forma (2), y *descendentes* á las que tienen la forma (3).

16. Teoremas fundamentales.—Toda serie de la forma (2) es desde luego absolutamente convergente para el valor $z = 0$, pues para este valor de la variable la serie se reduce al coeficiente a_0, que es, por hipótesis, un número finito; pero además de ese pueden existir otros muchos valores de z, para los cuales la serie sea convergente, y los teoremas que siguen permiten separar estos valores de aquellos que la hacen divergente.

Teorema de Cauchy.—*Si para un valor de la variable cuyo módulo es* ρ, *los módulos de los términos de una serie ordenada con relación á las potencias enteras, positivas y crecientes de la variable, son inferiores á un número positivo, determinado y finito*, A, *la serie es absolutamente convergente para todo valor de la variable cuyo módulo sea menor que* ρ.

En efecto, designemos por

$$r_0, r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$$

los módulos de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ de la serie

$$\sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

cuya variable z es imaginaria; y supongamos además que al dar á z un valor tal que $|z| = \rho$, los módulos de sus diversos términos

$$r_0, r_1\rho, r_2\rho^2, \ldots r_n \rho^n, \ldots \qquad (1)$$

enores que el número finito A. Demos á z un valor z'

tal que $|z'| = \rho' < \rho$, la serie

$$1 + \frac{\rho'}{\rho} + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n + \dots$$

es evidentemente convergente por ser $\frac{\rho'}{\rho} < 1$; luego multiplicando sus términos por los números (1) respectivamente, la serie obtenida

$$r_0 + r_1\rho' + r_2\rho'^2 + \dots + r_n\rho'^n + \dots$$

será convergente, y como esta serie es la de los módulos de los términos de la

$$a_0 + a_1z' + a_2z'^2 + \dots a_nz'^n + \dots,$$

la propuesta es absolutamente convergente para todo valor de z que satisfaga á la condición $|z| < \rho$, como se quería demostrar.

De una manera análoga podría demostrarse la proposición siguiente: *Si para un valor de la variable cuyo módulo es ρ, los módulos de los términos de una serie ordenada con relación á las potencias enteras, positivas y crecientes de la variable, son mayores que un número determinado y finito A, al menos desde un cierto término en adelante, la serie es divergente para todo valor de la variable cuyo módulo sea mayor que ρ.*

Teorema de Abel.—*Si una serie de la forma $\sum_0^\infty a_nz^n$ es $\left\{\begin{matrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{matrix}\right\}$ para un valor de la variable z de módulo ρ, será $\left\{\begin{matrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{matrix}\right\}$ para todo valor de z cuyo módulo sea $\left\{\begin{matrix}\text{mayor}\\ \text{menor}\end{matrix}\right\}$ que ρ; y en el caso de convergencia la serie será absolutamente convergente.*

Sea la serie

$$\sum_0^\infty a_nz^n = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots, \tag{1}$$

en la cual z es una variable imaginaria, y $a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ constantes reales ó imaginarias.

1.° Supuesta la convergencia de esta serie cuando z recibe un valor de módulo ρ, sus términos deben tender hacia cero á medida que n aumente indefinidamente, y lo mismo les ocurrirá á sus módulos (n.° 12, Observ. II); designemos los módulos de estos términos por $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n \ldots$ y por μ, número finito, el mayor de estos módulos. Demos ahora á z un valor z' cuyo módulo ρ' satisfaga á la condición $\rho' < \rho$: obtendremos una serie

$$a_0 + a_1 z' + a_2 z'^2 + \ldots + a_n z'^n + \ldots \qquad (2)$$

que podrá escribirse bajo la forma

$$a_0 + a_1 z\left(\frac{z'}{z}\right) + a_2 z^2 \left(\frac{z'}{z}\right)^2 + \ldots + a_n z^n \left(\frac{z'}{z}\right)^n + \ldots \qquad (3)$$

Si representamos por $\theta = \frac{\rho'}{\rho} < 1$ el módulo de la razón $\frac{z'}{z}$, los módulos de los términos de la serie (3) formarán la serie

$$\rho_0 + \rho_1 \theta + \rho_2 \theta^2 + \ldots + \rho_n \theta^n + \ldots \qquad (4)$$

cuyos términos son menores que los de la serie

$$\mu + \mu\theta + \mu\theta^2 + \ldots + \mu\theta^n + \ldots$$

que es una progresión geométrica de razón menor que la unidad; por consiguiente, la serie (4) es convergente, y, por tanto, la (1) absolutamente convergente para el valor considerado, como se quería demostrar.

2.° Si la serie (1) es divergente para un valor de z de módulo ρ, también lo será para todo valor de z de módulo $\rho' > \rho$. Pues si fuera convergente para este nuevo valor de z también lo sería para todos aquellos valores de módulo inferior á ρ' y, por tanto, para el valor de módulo ρ, lo cual es contrario á la hipótesis sentada.

17. Círculo y radio de convergencia de una —Los teoremas de Cauchy y Abel, sobre todo el de ...rmiten definir con toda precisión el campo de con-

vergencia de una serie de la forma $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, y permiten demostrar que este campo es un círculo que tiene por centro el origen de coordenadas, y por radio un cierto valor del módulo de la variable, que recibe por esta causa el nombre de *radio de convergencia* de la serie.

En efecto, dividamos todos los círculos que tengan su centro en el punto O, origen de coordenadas, en dos clases ó conjuntos A y B: diremos que un círculo pertenece á la clase A si la serie dada es convergente para cualquier valor de la variable contenido en su interior, y, por consiguiente, de módulo inferior á su radio; y diremos que pertenece á la clase B si la serie es divergente para cualquier valor de la variable exterior al círculo, y, por tanto, de módulo mayor que su radio.

Es evidente que un círculo cualquiera trazado desde el origen como centro y con un radio cualquiera, pertenecerá á la clase A ó á la B; porque si no pertenece á la clase A será porque en algún punto de su interior la serie es divergente, y en tal caso, también lo será para todo punto del exterior, y, por tanto, pertenecerá á la clase B. Además, si un círculo pertenece á la clase A, todos los concéntricos con él y situados en su interior pertenecen á la misma clase, y si pertenece á la clase B todos los concéntricos con él y situados en su exterior pertenecen á la misma clase B. La división de todos los círculos de centro O en las dos clases A y B satisface á todas las condiciones necesarias para definir un cierto círculo C, límite de las dos clases, y que goza de las propiedades fundamentales de que todo círculo situado en su interior pertenece á la clase A, y todo círculo situado en su exterior pertenece á la clase B; lo cual equivale á decir que para todo valor de la variable z de módulo inferior al radio de C la serie propuesta es absolutamente convergente, y para todo valor de z de módulo superior al radio de C, la serie es divergente, sin que *à priori* pueda afirmarse nada respecto á la convergencia ó divergencia de la serie para valores de z de módulo igual al radio de C, ó sea para puntos situados en la circunferencia que limita este círculo.

El círculo C recibe, como ya hemos dicho, el nombre de *círculo de convergencia de la serie*, y su radio, que designaremos por R, el de *radio de convergencia*. Claro es que el radio de convergencia de una serie depende de la naturaleza de ésta, y puede tener un valor real cualquiera. Así, por ejemplo, la serie

$$\sum_0^\infty z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

es absolutamente convergente para todo valor de z de módulo menor que la unidad, y divergente para cualquier valor de z de módulo mayor que uno, así que el radio de su círculo de convergencia será $R = 1$. La serie

$$\sum_0^\infty n!\,.\,z^n = 1 + 1!\,.\,z + 2!\,.\,z^2 + \dots + n!\,.\,z^n + \dots$$

es divergente para cualquier valor de z distinto de $z = 0$, luego el radio de su círculo de convergencia será $R = 0$. En cambio la serie

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

es absolutamente convergente para cualquier valor finito de z, por ser convergente la serie de los módulos correspondientes, luego el radio de su círculo de convergencia será $R = \infty$.

18. Determinación del radio de convergencia de una serie.—No es siempre fácil determinar el valor del radio de convergencia de una serie, por las formas variadas que éstas pueden presentar; sin embargo, en la mayoría de los casos la aplicación de uno de los teoremas que siguen permiten hacer esta determinación con toda precisión.

Teorema I.—*Una serie de la forma*

$$\sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

en la cual se satisface la condición

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \alpha,$$

representando α *un número positivo determinado, que también puede ser cero ó infinito, es absolutamente convergente en el interior de un círculo de radio* $\frac{1}{\alpha}$.

En efecto, sea $\alpha_1 > \alpha$ un número positivo, como α es el límite de la razón $\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|$, desde un cierto valor de n en adelante, se tendrá

$$\left| \frac{a^n}{a_{n-1}} \right| < \alpha_1,$$

y, por tanto,

$$\left| \frac{a_n z^n}{a_{n-1} z^{n-1}} \right| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \, | z | < \alpha_1 \, | z | \, ;$$

ahora bien, la serie propuesta será absolutamente convergente para todo valor de z cuyo módulo satisfaga la condición

$$\alpha_1 \, | z | < 1, \qquad \text{ó sea} \qquad | z | < \frac{1}{\alpha_1},$$

y como α_1 puede diferir de α en tan poco como queramos, para todo valor de z de módulo menor que $\frac{1}{\alpha}$.

Sea $\alpha_2 < \alpha$ un número positivo, como α es el límite de la razón $\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|$, desde un cierto valor de n en adelante, se tendrá

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| > \alpha_2,$$

y, por tanto,

$$\left| \frac{a_n z^n}{a_{n-1} z^{n-1}} \right| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \, | z | > \alpha_2 \, | z | \, ;$$

ahora bien, la serie propuesta será divergente para todo va-

lor de z cuyo módulo satisfaga la condición

$$\alpha_2 \mid z \mid > 1, \quad \text{ó sea} \quad \mid z \mid > \frac{1}{\alpha_2},$$

y como α_2 puede diferir de α en tan poco como queramos, será divergente para todo valor de z de módulo mayor que $\frac{1}{\alpha}$: luego $\frac{1}{\alpha}$ es el radio de convergencia de la serie.

Teorema II.—*Una serie de la forma*

$$\sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

en la cual se satisface la condición

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \alpha,$$

representando α un número positivo determinado, que también puede ser cero ó infinito, es absolutamente convergente en el interior de un círculo de radio $\frac{1}{\alpha}$.

La demostración de este teorema es casi idéntica á la del anterior, y por eso la omitimos.

Teorema III (Pincherle).—*Si en una serie de la forma $\sum_0^\infty a_n z^n$ cada una de las razones*

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|, \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \ldots$$

es constantemente finita, y designamos por α y β las dos razones de menor y mayor valor numérico respectivamente, vamos á demostrar que para todo valor de z de módulo mayor que $\frac{1}{\alpha}$ la serie es divergente; para todo valor de z de módulo menor que $\frac{1}{\beta}$ la serie es absolutamente convergente; y para valores de z cuyos módulos satisfacen á la limitación.

$$\frac{1}{\alpha} > \mid z \mid > \frac{1}{\beta},$$

no puede afirmarse à priori *la convergencia ó divergencia de la serie* (*).

En efecto, sea $\beta_1 > \beta$ un número positivo: desde un cierto valor de n en adelante, se tendrá evidentemente

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| < \beta_1,$$

y, por consiguiente,

$$\left| \frac{a_n z^n}{a_{n-1} z^{n-1}} \right| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| | z | < \beta_1 | z |;$$

ahora bien, la serie propuesta será absolutamente convergente para todo valor de z cuyo módulo satisfaga á la condición

$$\beta_1 | z | < 1, \qquad \text{ó sea} \qquad | z | < \frac{1}{\beta_1},$$

y como β_1 puede diferir de β en tan poco como deseemos, la serie será también absolutamente convergente para todo valor de z de módulo inferior á $\frac{1}{\beta}$.

Del mismo modo, si se supone $\alpha_1 < \alpha$, desde un cierto valor de n en adelante, se tendrá

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| > \alpha_1,$$

y, por consiguiente,

$$\left| \frac{a_n z^n}{a_{n-1} z^{n-1}} \right| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| | z | > \alpha_1 | z |;$$

ahora bien, la serie propuesta será divergente para todo valor de z cuyo módulo satisfaga á la condición

$$\alpha_1 | z | > 1, \qquad \text{ó sea} \qquad | z | > \frac{1}{\alpha_1},$$

y como α_1 puede diferir de α en tan poco como deseemos, la serie será también divergente para todo valor de z de módulo superior á $\frac{1}{\alpha}$.

(*) El enunciado de esta proposición y el de la siguiente, se abrevian de modo notable si se supone conocida la teoría de conjuntos.

Si $\frac{1}{\alpha} > |z| > \frac{1}{\beta}$, nada puede afirmarse respecto á la convergencia ó divergencia de la serie.

Nota.—Si $\alpha = \beta$, la razón $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|$ tiende hacia un límite determinado y finito, y esta proposición coincide con el teorema I.

TEOREMA IV (Cauchy-Hadamard).—*Si en una serie de la forma* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *los números*

$$a_1, \quad \sqrt{a_2}, \quad \sqrt[3]{a_3}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{a_n}, \quad \ldots, \qquad (1)$$

son finitos, y designamos por α *el de mayor valor numerico, vamos á demostrar que* $\frac{1}{\alpha}$ *es el radio de convergencia de la serie propuesta.*

En efecto, sea $\alpha_1 > \alpha$ un número positivo finito, por el enunciado mismo del teorema, á partir de un cierto valor de n en adelante, se tendrá

$$\left|\sqrt[n]{a_n}\right| < \alpha_1, \qquad \text{ó sea} \qquad |a_n| < \alpha_1^n,$$

y, por consiguiente,

$$|a_n z^n| < \alpha_1^n |z^n|;$$

ahora bien, para todo valor de z que satisfaga la condición

$$\alpha_1 |z| < 1, \qquad \text{ó sea} \qquad |z| < \frac{1}{\alpha_1},$$

la serie propuesta es absolutamente convergente, y como α_1 puede diferir de α en tan poco como deseemos, también lo será para todo valor de z de módulo inferior á $\frac{1}{\alpha}$.

Sea ahora $\alpha_2 < \alpha$ un número positivo; es evidente que entre α_2 y α estarán comprendidos infinitos elementos de la sucesión (1), ó, lo que es igual, que existirán infinitos índices $n_h = k$ para los cuales se verificará

$$\left|\sqrt[k]{a_k}\right| > \alpha_2, \qquad \text{ó sea} \qquad |a_k| > \alpha_2^k,$$

y, por tanto,

$$| a_k z^k | > (\alpha_2 | z |)^k;$$

ahora bien, para todo valor de z que satisfaga la condición

$$\alpha_2 | z | > 1, \qquad \text{ó sea} \qquad | z | > \frac{1}{\alpha_2},$$

la serie formada por esos términos, y, por consiguiente, la propuesta, es divergente; y como α_2 puede diferir de α en tan poco como queramos, la serie dada es divergente para todo valor de z de módulo mayor que $\frac{1}{\alpha}$; luego $\frac{1}{\alpha}$ es el radio de convergencia de la serie propuesta.

Nota.—El teorema de Cauchy-Hadamard es decisivo para la determinación del radio de convergencia de una serie de la forma $\sum_0^\infty a_n z^n$, pues reduce la cuestión á determinar el mayor valor del módulo de los números $\sqrt[n]{a_n}$, cosa siempre factible.

19. Series uniformemente convergentes.—Una serie de la forma $\sum_0^\infty a_n z^n$ convergente en un cierto campo, se dice que es *uniformemente convergente* en una parte de su campo, si á todo número positivo ε, tan pequeño como se quiera, se le puede hacer corresponder otro número entero y positivo n, tal que el valor absoluto del resto R_n de la serie

$$R_n = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} \ldots,$$

sea menor que ε para todos los valores de z contenidos en esa región del campo de convergencia. Como observa Goursat (*) la condición de que el número n, que corresponde á un cierto valor de ε, sea el mismo para todos los valores de z contenidos en el campo, es esencial en esta definición, porque para cada valor de z existe siempre un número n

(*) Goursat (12). Vol. 1, páginas 406-407.

que satisface á la condición de ser $|R_n| < \varepsilon$, por la convergencia de la serie, pero nada demuestra *à priori* que para un valor dado de n, el resto R_n tenga un módulo inferior á ε cualquiera que sea el valor de z. La serie

$$\sum_0^\infty z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots,$$

es uniformemente convergente para todo valor de z contenido en su círculo de convergencia, pues se tiene

$$R_n = z^n + z^{n+1} + \dots = \frac{z^n}{1-z},$$

y, por tanto,

$$|R_n| = \frac{|z^n|}{1-|z|},$$

ó sea, haciendo $|z| = r$,

$$|R_n| = \frac{r^n}{1-r};$$

y para que $|R_n|$ sea menor que ε, debe tenerse

$$\frac{r^n}{1-r} < \varepsilon, \qquad \text{de donde} \qquad r^n < (1-r)\,\varepsilon,$$

desigualdad que siempre queda satisfecha para un valor entero de n, y para todos los valores de r menores que la unidad.

20. Propiedades de las series uniformemente convergentes.—En los teoremas que siguen están contenidas las propiedades que nos interesa conocer de las series uniformemente convergentes.

TEOREMA I.—*Toda serie de la forma* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *es uniformemente convergente en el interior de un círculo de radio* r *que difiera por defecto del radio de convergencia* R *en una cantidad positiva* δ *tan pequeña como se quiera.*

En efecto, por ser $R - r < \delta$, y δ un número positivo, $\frac{r}{R} < 1$, y, por tanto, la serie

$$1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \dots + \left(\frac{r}{R}\right)^n + \dots$$

es convergente, y según lo antes expuesto (n.° 19) puede obtenerse un valor entero de n, para el cual se verifique que

$$\left(\frac{r}{R}\right)^n + \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} + \dots < \alpha,$$

siendo α un número positivo tan pequeño como podamos desear. Si designamos por $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ los módulos de $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, y por M el mayor de los productos

$$r_n R^n, \qquad r_{n+1} R^{n+1}, \qquad \dots,$$

M será un número finito por ser convergente la serie dada, y el valor del resto de la serie propuesta para un valor de z de módulo r, será

$$| R_n | \leq r_n r^n + r_{n+1} r^{n+1} + \dots < M\left(\frac{r^n}{R^n} + \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}} + \dots\right) = M\alpha;$$

y para que esta expresión sea menor que un cierto número positivo ε tan pequeño como se desee, será suficiente hacer

$$M\alpha < \varepsilon, \qquad \text{ó sea} \qquad \alpha < \frac{\varepsilon}{M},$$

lo que siempre es posible.

Teorema II.—*Si* $f_1(z), f_2(z), \dots f_n(z), f_{n+1}(z) \dots$ *son funciones continuas de z para todos los valores de la variable contenidos en el interior de un contorno, y para estos valores la serie*

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + f_{n+1}(z) + \dots, \quad (1)$$

es uniformemente convergente, la función F(z) *será continua para todos los valores de* z *comprendidos en ese contorno.*

En efecto, suponiendo que damos á z un valor cualquiera contenido en el interior del contorno dado, hagamos

$$\varphi_1(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z),$$
$$\varphi_2(z) = f_{n+1}(z) + \dots,$$

se deducirá

$$F(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z).$$

Por ser la serie (1) uniformemente convergente siempre se podrá elegir un valor de n para el cual se verifique que

$$|\varphi_2(z)| < \alpha,$$

siendo α un número positivo tan pequeño como queramos.

Si damos á z un valor $z+h$, contenido también en el interior del contorno dado, se tendrá

$$F(z+h) = \varphi_1(z+h) + \varphi_2(z+h),$$

y, por consiguiente,

$$F(z+h) - F(z) = [\varphi_1(z+h) - \varphi_1(z)] + [\varphi_2(z+h) - \varphi_2(z)];$$

ahora podrá siempre asignarse á h un valor suficientemente pequeño para que se tenga

$$|\varphi_1(z+h) - \varphi_1(z)| < \alpha,$$
$$|\varphi_2(z+h) - \varphi_2(z)| < 2\alpha,$$

y, por lo tanto,

$$|F(z+h) - F(z)| < 3\alpha,$$

cantidad tan pequeña como podamos desear; la igualdad anterior nos demuestra que $F(z)$ es una función continua de z, y el teorema queda probado.

Corolario.—Toda serie de la forma $\sum_0^\infty a_n z^n$ cumple las condiciones del enunciado del teorema anterior para todo valor de z contenido en el interior de su círculo de convergencia; luego podremos afirmar que *la función representada por una serie de la forma* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *es una función continua para todo valor de z contenido en el interior de su círculo de convergencia.* Esta proposición es de la mayor importancia.

Teorema III.—*Una función de la forma* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, *no puede ser desarrollada en una serie de potencias de z más que de una sola manera.*

En efecto, supongamos que además de ser

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

se tuviese

$$f(z) = \sum_0^\infty b_n z^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots;$$

es evidente que estos dos desarrollos serán idénticos para todo valor de z contenido en el interior del círculo de convergencia, y, por tanto, para $z = 0$; pero de esta hipótesis se deduce inmediatamente $a_0 = b_0$.

Suprimiendo estos dos sumandos, dividiendo por z é igualando, se obtiene

$$a_1 + a_2 z + \ldots + a_n z^{n-1} + \ldots = b_1 + b_2 z + \ldots + b_n z^{n-1} + \ldots;$$

igualdad que debe verificarse para todo valor de z contenido en el círculo de convergencia, y, por tanto, para $z = 0$, hipótesis de la cual se deduce $a_1 = b_1$; y repitiendo este mismo razonamiento se probaría que los dos desarrollos son idénticos.

CAPITULO IV

Funciones elementales.

21. Función entera.—La más sencilla de las funciones elementales, después de la potencial, es la función algébrica, racional y entera formada por un polinomio de la forma

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_m z^m,$$

en el cual m es un número entero, positivo y finito, y $A_0, A_1, A_2, \dots A_m$ son números reales ó complejos finitos. Demostrada en un párrafo anterior (n.° 4) la continuidad de la función potencial, es evidente que la función entera es también una función continua y finita para todo valor finito de la variable.

22. Función exponencial.—La función exponencial e^x se desarrolla en la serie absoluta y uniformemente convergente, para todo valor real y finito de x,

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad (1)$$

Si ahora consideramos la serie

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \qquad (2)$$

en la que z representa una variable compleja, veremos que también es absoluta y uniformemente convergente para todo

valor de z de módulo finito, por serlo la de los módulos de sus términos. La serie (2) define, por lo tanto (n.° 20), una función continua de la variable z en un círculo de convergencia de radio infinito: esta función ha recibido el nombre de *función exponencial de variable imaginaria*, y se representa por e^z, así que tendremos

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \qquad (3)$$

Propiedades. — *I. La función exponencial de variable imaginaria contiene como caso particular la de variable real.*

Pues es suficiente suponer en la expresión (3) $z = x$, y x número real para obtener la serie (1).

II. La función definida por la serie (3) *conserva la propiedad fundamental de la exponencial de variable real, propiedad expresada por la igualdad*

$$e^{z_1} + e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \qquad (4)$$

En efecto, sustituyendo z_1 y z_2 por z en la expresión (3), se tiene

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \dots + \frac{z_1^n}{n!} + \dots,$$

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \dots + \frac{z_2^n}{n!} + \dots,$$

y aplicando á estas dos series el método de multiplicación anteriormente explicado (n.° 14), el término general del producto es

$$1 \cdot \frac{z_2^n}{n!} + \frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{z_1^n}{n!} \cdot 1 = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!},$$

lo que nos demuestra la exactitud de la igualdad (4).

III. La función e^z *puede ponerse bajo la forma* X + Yi.

Pues es suficiente sustituir z por $x + yi$ en la fórmula (3)

desarrollar sus diversos términos y agrupar las partes reales é imaginarias.

23. Funciones circulares directas.—Las funciones circulares de arco real x, *sen.* x y *cos.* x, se desarrollan en las series absoluta y uniformemente convergentes, para todo valor de x,

$$\text{sen.}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos.\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Si ahora consideramos las dos series

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots;$$

en las que z representa una variable imaginaria, veremos que son también absoluta y uniformemente convergentes para todo valor de z de módulo finito, por serlo las de los módulos de sus diversos términos. Las series consideradas definen, por tanto (n.° 20), dos funciones continuas de la variable z en un círculo de convergencia de radio infinito: estas funciones reciben el nombre de *seno* y *coseno* del arco complejo z, y se representan por

$$\left.\begin{aligned}\text{sen.}\,z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\\ \cos.\,z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Los nombres de *seno* y *coseno* dados á estas funciones, se justifican por contener como caso particular (si $z = x =$ número real) las funciones ordinarias de igual nombre y por poseer propiedades análogas á las de éstas, según ahora veremos.

Definiremos la función *tg.* z como razón de las dos anterio-

res, es decir, haciendo

$$\text{tg.}\,z = \frac{\text{sen}\,z}{\cos.\,z}.$$

y las tres funciones *sec.* z, *cosec.* z y *cotg.* z como las recíprocas de las tres fundamentales, es decir, haciendo

$$\sec.\,z = \frac{1}{\cos.\,z}, \qquad \text{cosec.}\,z = \frac{1}{\text{sen}\,z}, \qquad \text{ctg.}\,z = \frac{1}{\text{tg}\,z}.$$

Es evidente (n.° 4) que las funciones *tg.* z, *ctg.* z, *sec.* z y *cosec.* z son funciones continuas de z para todos los valores de esta variable, excepto para aquellos que anulen á sus correspondientes denominadores.

Sustituyendo z por $-z$ en las series (5), se obtiene inmediatamente

$$\text{sen.}(-z) = -\text{sen.}\,z, \qquad \cos.(-z) = \cos.\,z,$$

es decir, que el coseno es una función *par* y el seno es una función *impar;* y de aquí se deduce que la secante también es función *par*, y la tangente, cotangente y cosecante son funciones *impares*, lo mismo que en las funciones circulares de variable real.

24. Fórmulas de Euler.—Si en la serie exponencial (3) sustituímos z por zi, después z por $-zi$, siendo z real ó imaginario, y separamos las partes reales de las imaginarias, se obtiene

$$e^{zi} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \cdots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots\right),$$

$$e^{-zi} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \cdots\right) - i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots\right),$$

ó sea

$$\left.\begin{aligned} e^{zi} &= \cos.\,z + i.\text{sen.}\,z \\ e^{-zi} &= \cos.\,z - i.\text{sen.}\,z \end{aligned}\right\}, \qquad (6)$$

fórmulas de las cuales se deducen inmediatamente las

$$\cos.z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \text{sen}.z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \quad \text{tg}.z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i(e^{zi} + e^{-zi})}, \quad (7)$$

que son las llamadas *fórmulas de Euler*, de uso frecuentísimo, así como otras análogas relativas á *sec.z*, *cosec.z* y *ctg.z*.

Las fórmulas (7) nos permiten poner las funciones *sen.z* y *cos.z* bajo la forma $X + Yi$, pues si en ellas hacemos $z = yi$, siendo y un número real, se tiene

$$\left.\begin{aligned} \cos.yi &= \frac{e^{yi^2} + e^{-yi^2}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = Ch.y \\ \text{sen}.yi &= \frac{e^{yi^2} - e^{-yi^2}}{2i} = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i.Sh.y \end{aligned}\right\},$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} \cos.z &= \cos.(x + yi) = \cos.x.\cos.yi - \text{sen}.x.\text{sen}.yi = \\ &\qquad \cos.x.Ch.y - i.\text{sen}.x.Sh.y \\ \text{sen}.z &= \text{sen}.(x + yi) = \text{sen}.x.\cos.yi + \cos.x.\text{sen}.yi = \\ &\qquad \text{sen}.x, Ch.y + i.\cos.x.Sh.y \end{aligned}\right\},$$

y, por tanto, los valores numéricos de *sen.z* y *cos.z* podrán calcularse mediante el empleo de tablas de funciones circulares é hiperbólicas.

25. Forma exponencial de los números complejos.—Las fórmulas que preceden permiten presentar los números complejos bajo una forma distinta de las empleadas hasta ahora, y que es de suma utilidad. Sea un número complejo de la forma $a + bi = r(\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha)$, por las fórmulas (6) se tiene

$$\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha = e^{\alpha i},$$

y, por consiguiente,

$$a + bi = r.e^{\alpha i}.$$

Ahora bien,

$$r = e^{lr}, \qquad \text{ó sea} \qquad r = e^{\lambda},$$

si hacemos $x = lr = l\sqrt{a^2+b^2}$ (*), y, por tanto,

$$a+bi = r.e^{\alpha i} = e^{x+\alpha i} = e^{x+yi} = e^x(\cos.y + i.\text{sen}.y), \quad (8)$$

sustituyendo y por α. En la expresión (8) el factor e^x representa el módulo, y el elemento y el argumento del número complejo, y pueden fácilmente calcularse en función de a y b por medio de las fórmulas

$$x = l.\sqrt{a^2+b^2}, \qquad y = \text{arc. tg.}\frac{b}{a}.$$

Como casos particulares de la fórmula (8) merecen mencionarse, por su excepcional importancia, los siguientes, en todos los cuales suponemos $x=0$, y, como consecuencia, $e^x = 1$, y k representa un número entero cualquiera, positivo ó negativo, que puede ser cero:

$$\left.\begin{array}{c}
y = 2k\pi \ldots e^{2k\pi i} = \cos.(2k\pi) + i.\text{sen}.(2k\pi) = +1. \\
y = (2k+1)\pi \ldots e^{(2k+1)\pi i} = \\
\cos.(2k+1)\pi + i.\text{sen}.(2k+1)\pi = -1. \\
y = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \ldots e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i} = \\
\cos.\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi + i.\text{sen}.\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi = +i. \\
y = \left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi \ldots e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i} = \\
\cos.\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi + i.\text{sen}.\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi = -i.
\end{array}\right\} (9)$$

26. Algunas propiedades de las funciones circulares.—Las fórmulas (7) y (9) permiten extender á las funciones circulares de arco imaginario la generalidad de las propiedades que poseen las de arco real. Así, si en las

(*) Por el signo l expresaremos los logaritmos neperianos ordinarios.

fórmulas (7) se sustituye s por $\frac{\pi}{2} - s$, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen.}\left(\frac{\pi}{2} - s\right) &= \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-s\right)i} - e^{-\left(\frac{\pi}{2}-s\right)i}}{2i} = \\
&\frac{e^{si} + e^{-si}}{2} = \cos. s \\
\cos.\left(\frac{\pi}{2} - s\right) &= \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-s\right)i} + e^{-\left(\frac{\pi}{2}-s\right)i}}{2} = \\
&\frac{e^{si} - e^{-si}}{2i} = \text{sen.}\, s
\end{aligned}\right\}.$$

Si en las mismas fórmulas (7) sustituímos s por $\pi - s$, se obtendrá

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen.}(\pi - s) &= \frac{e^{(\pi-s)i} + e^{-(\pi-s)i}}{2i} = \frac{-e^{-si} + e^{si}}{2i} = \text{sen.}\, s \\
\cos.(\pi - s) &= \frac{e^{(\pi-s)i} + e^{-(\pi-s)i}}{2} = -\frac{e^{si} + e^{-si}}{2} = -\cos. s
\end{aligned}\right\}.$$

Haciendo en las mismas fórmulas s igual á $\pi + s$, se obtendrá

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen.}(\pi + s) &= \frac{e^{(\pi+s)i} - e^{-(\pi+s)i}}{2i} = -\frac{e^{si} - e^{-si}}{2i} = -\text{sen.}\, s \\
\cos.(\pi + s) &= \frac{e^{(\pi+s)i} + e^{-(\pi+s)i}}{2} = -\frac{e^{si} + e^{-si}}{2} = -\cos. s
\end{aligned}\right\}$$

Si en la expresión $e^{s_1+s_2} = e^{s_1} \times e^{s_2}$ se reemplazan s_1 y s_2 por $s_1 i$ y $s_2 i$, se obtiene

$$e^{(s_1+s_2)i} = e^{s_1 i} \times e^{s_2 i},$$

y sustituyendo en esta la forma exponencial por la módulo

argumental, se deduce

$$\cos.(z_1 + z_2) + i.\text{sen}.(z_1 + z_2) =$$
$$(\cos.z_1 + i.\text{sen}.z_1)(\cos.z_2 + i.\text{sen}.z_2) =$$
$$(\cos.z_1 \cos.z_2 - \text{sen}.z_1.\text{sen}.z_2) + i(\text{sen}\, z_1 \cos.z_2 + \cos.z_1.\text{sen}.z_2),$$

y, por tanto,

$$\left.\begin{aligned} \cos.(z_1 + z_2) &= \cos.z_1 \cos.z_2 - \text{sen}.z_1.\text{sen}.z_2 \\ \text{sen}.(z_1 + z_2) &= \text{sen}.z_1.\cos.z_2 + \cos.z_1.\text{sen}.z_2 \end{aligned}\right\}. \quad (10)$$

Si en estas fórmulas hacemos $z_1 = z_2$, se deduce

$$\left.\begin{aligned} \cos.2z_1 &= \cos.^2 z_1 - \text{sen}.^2 z_1 \\ \text{sen}.2z_1 &= 2\text{sen}.z_1.\cos.z_1 \end{aligned}\right\};$$

y haciendo en la primera de las (10) $z_2 = -z_1$

$$\cos.(z_1 - z_1) = \cos.0 = 1 = \cos.^2 z_1 + \text{sen}.^2 z_1;$$

y de modo análogo podríamos deducir otra multitud de fórmulas idénticas á las conocidas de las funciones circulares ordinarias.

27. Periodicidad de las funciones exponencial y circulares.—Sabido es que una función $f(z)$ se dice que es periódica y que admite el período w, si se verifica la igualdad

$$f(z + kw) = f(z),$$

siendo k un número entero cualquiera, positivo ó negativo.

I. La función exponencial es periódica y tiene por período $2\pi i$.

En efecto, en virtud de las fórmulas (9), se tiene

$$e^{z + 2k\pi i} = e^z . e^{2k\pi i} = e^z.$$

II. Las funciones sen.z *y* cos.z *son periódicas y admiten el período* 2π.

En efecto, en virtud de las fórmulas (7) y (9), se tiene

$$\text{sen.}(z+2k\pi)=\frac{e^{(z+2k\pi)i}-e^{-(z+2k\pi)i}}{2i}=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=\text{sen.}\,z,$$

$$\cos.(z+2k\pi)=\frac{e^{(z+2k\pi)i}+e^{-(z+2k\pi)i}}{2}=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=\cos.\,z.$$

III. La función tg.z *es periódica y admite el período* π.

En efecto, en virtud de las fórmulas (7) y (9), se tiene

$$\text{tg.}(z+k\pi)=\frac{e^{(z+k\pi)i}-e^{-(z+k\pi)i}}{i\,[e^{(z+k\pi)i}+e^{-(z+k\pi)i}]}=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{i(e^{zi}+e^{-zi})}=\text{tg.}\,z.$$

28. Generalización de la fórmula de Moivre. La fórmula de Moivre, de tan frecuentes aplicaciones en el Análisis, se establece en los tratados elementales en el caso de argumento real; las fórmulas y consideraciones precedentes permiten generalizarla al caso de argumento imaginario. En efecto, sea z un número real ó imaginario, si designamos por m y n dos números enteros y positivos, se tendrá

$$(e^{\pm z})^m=\left(e^{\pm\frac{mz}{n}}\right)^n=\left(e^{\pm\frac{mz}{n}}\right)^n.\left(e^{\pm\frac{2k\pi i}{n}}\right)^n=$$

$$\left[e^{\pm\left(\frac{m}{n}z+\frac{2k\pi}{n}i\right)}\right]^n;$$

reemplazando en esta expresión z por zi, sea z real ó imaginario, pues si $z=x+yi$, se tendrá $zi=xi-y$, se obtiene

$$(e^{\pm zi})^m=\left[e^{\pm\left(\frac{m}{n}z+\frac{2k\pi}{n}\right)i}\right]^n,$$

ó sustituyendo las exponenciales por las formas argumentales

$$(\cos.z\pm i.\text{sen.}z)^m=\left[\cos.\left(\frac{m}{n}z+\frac{2k\pi}{n}\right)\pm i.\text{sen.}\left(\frac{m}{n}z+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]^n$$

y extrayendo la raíz de índice n

$$\left(\cos. z \pm i.\text{sen } z\right)^{\frac{m}{n}} = \cos.\left(\frac{m}{n} z + \frac{2k\pi}{n}\right) \pm i.\text{sen.}\left(\frac{m}{n} z + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

que es la fórmula de Moivre. El segundo miembro de la expresión anterior admite n valores diferentes, que se obtienen sustituyendo k por un sistema completo de números incongruentes con n.

29. Función logarítmica.—Si suponemos que z y u son dos variables cualesquiera enlazadas por la relación

$$e^u = z,$$

la variable u se denomina *el logaritmo neperiano de z*, y se designa por la notación

$$u = l((z)),$$

empleada por Cauchy para diferenciar los logaritmos generales de los números de sus valores reales, cuando éstos existen. La función logaritmo neperiano no es, por tanto, otra cosa más que la función inversa de la exponencial de base e. Si hacemos.

$$u = x + yi, \qquad z = \rho(\cos.\theta + i.\text{sen.}\theta) = \rho e^{\theta i},$$

se obtiene inmediatamente

$$e^{x+yi} = \rho e^{\theta i},$$

de donde se deduce

$$e^x = \rho, \qquad e^{yi} = e^{\theta i},$$

y, por consiguiente,

$$x = l\rho, \qquad y = \theta + 2k\pi,$$

y de aquí, y de la definición,

$$u = l((z)) = l\rho + (\theta + 2k\pi)i, \tag{11}$$

expresión en la cual k es un número entero cualquiera positivo ó negativo. La expresión (11) nos demuestra que á cada valor de z corresponden una infinidad de valores de u, que forman una progresión aritmética cuya razón es $2\pi i$, y cada uno de cuyos términos es un valor del logaritmo neperiano de z. La función $u = l((z))$ es, por consiguiente, *infinitiforme*. Cauchy llamaba *valor principal* del logaritmo neperiano de un número cualquiera z el que se deduce de la fórmula (11) haciendo $k = 0$, y lo designaba con la notación

$$lz = l\rho + \theta i;$$

este valor está siempre perfectamente determinado, pues $l\rho$ es un número que puede conocerse en cada caso, y θ es el menor valor del argumento de z.

La representación geométrica de la función $l((z))$ nos da á conocer una curiosa propiedad de esta función. Si imaginamos que la variable z describe, en sentido directo, en su plano una curva continua cerrada que no contenga en su interior al origen, partiendo de un punto z_0 para volver á él, ρ y θ varían de un modo continuo y vuelven á z_0 con el mismo valor inicial; por tanto, si se representa cada valor del logaritmo por un punto, cada uno de estos infinitos puntos describirá una curva continua y cerrada. Por el contrario, si la variable z describe en iguales condiciones una curva cerrada, en cuyo interior se encuentre el origen, ρ vuelve al punto de partida con su valor inicial, pero θ viene aumentado en 2π, y cada determinación del logaritmo toma su valor inicial aumentado en $2\pi i$. Por consiguiente, las diversas determinaciones de $l((z))$ no es posible considerarlas como funciones distintas é independientes de z, si no se impone alguna restricción á la variación de esta variable, puesto que se puede pasar de una á otra variando z de un modo continuo; en realidad, estas distintas determinaciones son ramas diferentes de una misma función que se permutan alrededor del punto $z = 0$ (*).

(*) Esta importante observación está tomada de la obra Goursat (12), tomo II, págs. 28-29.

Como casos particulares de la fórmula (11) merecen señalarse los siguientes.

$$\left.\begin{array}{l} z = \text{n.}^\circ \text{ real positivo} \ldots \theta = 0, \ldots l((z)) = l\rho + 2k\pi i \\ z = \text{n.}^\circ \text{ real negativo} \ldots \theta = \pi, \ldots l((z)) = l\rho + (2k+1)\pi i \\ z = +1, \ldots\ldots\ldots\ldots \rho = 1, \ldots l((1)) = 2k\pi i \\ z = -1, \ldots\ldots\ldots\ldots \rho = 1, \ldots l((-1)) = (2k+1)\pi i \end{array}\right\}. \quad (12)$$

La primera de estas fórmulas nos dice que *todo número real positivo tiene un logaritmo real* (para $k=0$, $lz = l\rho$) *y una infinidad de logaritmos imaginarios*. La tercera de las fórmulas (12) nos dice que el logaritmo real de la unidad positiva es cero.

Y las fórmulas segunda y cuarta de las (12) nos dicen que; *los números reales negativos, incluso la unidad negativa, no tienen ningún logaritmo neperiano real, pero tienen una infinidad de logaritmos imaginarios.*

Propiedad fundamental de la función logarítmica.—La propiedad fundamental de la función logarítmica ordinaria expresada por la igualdad.

$$l(z_1 z_2) = lz_1 + lz_2,$$

y de la cual se derivan todas las demás, se conserva en la función logarítmica de variable compleja, pues si se tiene

$$u_1 = l((z_1)), \quad u_2 = l((z_2)),$$

se deduce

$$z_1 = e^{u_1}, \quad z_2 = e^{u_2},$$

y, por tanto,

$$z_1 \times z_2 = e^{u_1 + u_2},$$

ó, lo que es igual,

$$l((z_1 z_2)) = u_1 + u_2 = l((z_1)) + l((z_2));$$

únicamente debe tenerse en cuenta que los valores de los argumentos han de elegirse de modo conveniente para que se correspondan los valores de ambos miembros.

Otra forma de la función logarítmica.—Si el número complejo z se presenta bajo su forma aritmética $z = a + bi$,

comparando esta expresión con la $z = \rho(\cos.\theta + i\,\text{sen}.\theta)$, se deduce

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \qquad \theta = \text{arc. tg.}\,\frac{b}{a}\,,$$

y, por tanto, la fórmula (11) tomará la forma

$$u = l((z)) = l.\sqrt{a^2 + b^2} + \left(\text{arc. tg.}\,\frac{b}{a} + 2k\pi\right)i\,.$$

Logaritmos en base cualquiera.—Las funciones exponenciales y logarítmicas consideradas hasta ahora se refieren á la base e, pero las fórmulas que preceden permiten extender sus propiedades á otra base cualquiera. En efecto, si designamos por a una nueva base, se tiene

$$a = e^{la},$$

y, por consiguiente, para la exponencial se tendrá

$$a^z = (e^{la})^z = e^{z.la},$$

y para la logarítmica se deducirá, si hacemos $u = lg._a((z))$,

$$z = e^{u.la}, \qquad l((z)) = u.la,$$

y, por tanto,

$$u = \frac{l((z))}{la}\,.$$

30. Definición de la potencia de exponente imaginario.—Mediante los principios y fórmulas que acabamos de establecer puede darse una interpretación exacta de la función potencial en el caso que el exponente sea un número complejo. Para ello, tratemos de averiguar qué representa la expresión $u = z^n$ en la hipótesis de que z y n son números complejos. Si suponemos

$$z = a + bi,$$

se puede hacer

$$z = e^{x + yi},$$

dando á x é y los valores

$$x = l.\sqrt{a^2 + b^2}, \qquad y = \text{arc. tg.}\, \frac{b}{a} + 2k\pi.$$

Si ahora hacemos

$$x + yi = r(\cos.\varphi + i.\text{sen.}\varphi),$$

se tendrá

$$z = e^{r(\cos.\varphi + i.\text{sen.}\varphi)}.$$

Hagamos al mismo tiempo

$$n = n_1 + n_2 i = \rho(\cos.\omega + i.\text{sen.}\omega),$$

y observemos, que tanto φ como ω pueden recibir un número ilimitado de valores que satisfagan á las dos condiciones,

$$\varphi = \text{arc. tg.}\, \frac{y}{x} + 2k\pi, \qquad \omega = \text{arc. tg.}\, \frac{n_2}{n_1} + 2k\pi.$$

La función potencial tomará la forma

$$u = z^n = (a + bi)^{n_1 + n_2 i} = \left[e^{r(\cos.\varphi + i.\text{sen.}\varphi)}\right]^{\rho(\cos.\omega + i.\text{sen.}\omega)} = e^{r\rho[\cos.(\varphi+\omega) + i.\text{sen.}(\varphi+\omega)]} =$$

$$e^{r\rho\cos.(\varphi+\omega)}[\cos.\{r\rho.\text{sen.}(\varphi+\omega)\} + i.\text{sen.}\{r\rho.\text{sen.}(\varphi+\omega)\}],$$

y haciendo

$$R = e^{r\rho\cos.(\varphi+\omega)} \quad \text{y} \quad \Phi = r\rho.\text{sen.}(\varphi+\omega),$$

se obtendrá finalmente

$$u = z^n = R(\cos.\Phi + i.\text{sen.}\Phi),$$

expresión en la cual R y Φ pueden tener infinitos valores, pues ambos dependen de φ y ω. La función z^n, en este caso general, es infinitiforme y no está bien determinada; suele considerarse como valor principal el que se obtiene suponiendo que y, φ y ω tienen valores menores que 2π.

31. Funciones circulares inversas.—En la teoría de funciones circulares de variable real se demuestra que

las funciones inversas *arc. cos. x*, *arc. sen. x*, *arc. tg. x*, etc., son susceptibles de una infinidad de valores comprendidos en fórmulas conocidas y de uso constante, y ahora vamos á demostrar que las funciones circulares inversas de variable compleja tienen análogas propiedades.

Función u = arc. cos. z.—Definiremos la función

$$u = \text{arc. cos.}\, z$$

como la relación inversa de la $z = \cos. u$, ó sea suponiendo que la serie

$$1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots$$

tiene por límite ó suma el número z. Por la primera de las fórmulas (7) del n.° 24, se tiene

$$z = \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2},$$

ó sea

$$e^{ui} + \frac{1}{e^{ui}} = 2z, \quad \text{de donde} \quad e^{2ui} - 2z.e^{ui} + 1 = 0,$$

y, por consiguiente,

$$e^{ui} = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

luego

$$u = \frac{1}{i}\, l((z \pm \sqrt{z^2 - 1})),$$

pero como

$$z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}},$$

y, por tanto,

$$l((z - \sqrt{z^2 - 1})) = -\, l((z + \sqrt{z^2 - 1})),$$

la expresión de u toma la forma

$$u = \pm \frac{1}{i} l((z + \sqrt{z^2 - 1})).$$

Ahora bien, como el logaritmo de un número complejo tiene una infinidad de valores, la función $u = arc. cos. z$ es infinitiforme.

Función u = arc. sen. z.—Definiremos la función

$$u = \text{arc. sen.}\, z$$

como la relación inversa de la $z = sen. u$, ó sea suponiendo que la serie

$$u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots$$

tiene por límite ó suma el número z. De la segunda de las fórmulas (7) del n.º 24, se deduce

$$z = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i},$$

ó sea

$$e^{ui} - \frac{1}{e^{ui}} = 2zi, \quad \text{de donde} \quad e^{2ui} - 2zi . e^{ui} - 1 = 0,$$

y, por consiguiente,

$$e^{ui} = zi \pm \sqrt{1 - z^2} = zi \pm i\sqrt{z^2 - 1},$$

luego

$$u = \frac{1}{i} l((zi \pm i\sqrt{z^2 - 1})).$$

Y como el logaritmo del número complejo $zi \pm i\sqrt{z^2 - 1}$ tiene infinitos valores, la función $u = arc. sen. z$ es infinitiforme.

Función u = arc. tg. z.—Definiendo la función

$$u = arc. tg. z$$

como inversa de la $z = tg.u$, la tercera de las fórmulas (7) del número 24 nos da

$$z = \text{tg}.\,u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{i(e^{ui} + e^{-ui})} = \frac{e^{2ui} - 1}{i(e^{2ui} + 1)},$$

de donde se deduce

$$e^{2ui} - 1 = zie^{2ui} + zi, \quad \text{ó sea} \quad e^{2ui}(1 - zi) = 1 + zi,$$

y, por tanto,

$$e^{2ui} = \frac{1 + zi}{1 - zi},$$

luego

$$u = \frac{1}{2i}\, l\left(\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left[l((1 + zi)) - l((1 - zi))\right];$$

y como el logaritmo de la fracción $\frac{1+zi}{1-zi}$ admite infinitos valores, la función $u = arc.\,tg.z$ es infinitiforme.

Fórmulas análogas á las anteriores se obtendrían para las funciones *arc. sec.z*, *arc, cosec.z* y *arc. ctg.z.*

CAPÍTULO V

Diferenciación.

32. Primeras nociones.—Las definiciones que anteriormente hemos dado (n.º 3) de función de una variable compleja, así como de su continuidad, no imponen á las funciones reales que la constituyen ninguna restricción especial, así que, suponiendo continua la función

$$u = f(z) = X + Yi,$$

las funciones X é Y no tienen que satisfacer á más condición que á la de ser continuas respecto á las variables $\left\{ \begin{matrix} x, y \\ \rho, \alpha \end{matrix} \right\}$, según se suponga $z = \left\{ \begin{matrix} x + yi \\ \rho(\cos.\alpha + i \operatorname{sen}.\alpha) \end{matrix} \right\}$. Si no establecemos ninguna otra restricción, el estudio de las funciones de la forma u queda reducido al de dos funciones de dos variables, independientes ó no, y aunque el enlace de estas funciones por el símbolo i introduce algunas simplificaciones son de muy escasa utilidad. Por esta causa, nosotros, siguiendo á Cauchy, vamos á restringir la significación dada á las funciones X é Y, comenzando por hallar las condiciones á que deben satisfacer para que la función u tenga una derivada perfectamente determinada con independencia del valor del incremento que reciba z.

33. Condiciones de existencia de la derivada. Según se sabe, si $f(x)$ es una función continua de la variable

real x, que admite una derivada, la razón $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tiende hacia $f'(x)$ cuando Δx tiende hacia cero. Tratemos de hallar, de modo análogo, hacia qué límite tiende el cociente

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\Delta X+i.\Delta Y}{\Delta x+i.\Delta y},$$

cuando el módulo Δz tiende hacia cero, es decir, cuando Δx y Δy tienden simultáneamente hacia cero. Si X é Y son funciones continuas cualesquiera, es fácil ver que el límite de la razón anterior dependerá, en general, del límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ó, lo que es igual, de la dirección de la tangente en el punto z á la curva descrita por esta variable al ir del punto $z+\Delta z$ al z; y lo que tratamos de averiguar son las condiciones á que deben satisfacer las funciones X é Y para que el límite de esa razón sea independiente del valor del límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Suponiendo

$$u=f(z)=X+Yi,$$

y $z=x+yi$, supongamos que las dos funciones de x, y, X é Y tienen derivadas parciales respecto á cada una de estas variables, y se tendrá

$$du=d(X+Yi)=dX+i.dY,$$

ó sea

$$du=\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy+i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)=$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy,$$

y, por consiguiente,

$$\frac{du}{dz}=\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy}{dx+i.dy}. \quad (1)$$

Dos caminos podemos seguir ahora para realizar nuestro propósito. El primero consiste en observar que para que la fracción (1) tienda hacia un límite finito y determinado independientemente del valor de la razón $\frac{dy}{dx}$ es necesario que las razones de los coeficientes de dx y dy en sus dos términos sean iguales, es decir, que se tenga

$$\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=\frac{\partial Y}{\partial y}-i\frac{\partial X}{\partial y},$$

y, por lo tanto, es preciso que se verifiquen las dos igualdades

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y},\qquad \frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{2}$$

Estas mismas condiciones se obtienen también del modo siguiente: supongamos que z recorre una recta paralela al eje de las x, entonces y es constante, $dy=0$, y la fórmula (1) se reduce á

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial x}+i.\frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{3}$$

Si ahora se supone que z recorre una recta paralela al eje de las y, entonces x es constante, $dx=0$, y la fórmula (1) se reduce á

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial u}{i.\partial y}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=\frac{\partial Y}{\partial y}-i\frac{\partial X}{\partial y}. \tag{4}$$

La identificación de las expresiones (3) y (4), necesaria para que $\frac{du}{dz}$ tenga un valor independiente del de $\frac{dy}{dx}$, nos conduce nuevamente á las fórmulas (2) antes obtenidas. Las expresiones (3) y (4) nos dan también la fórmula siguiente, que es muy inportante,

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Las condiciones (2) que acabamos de demostrar son necesarias para que la derivada de $u = f(z)$ esté determinada con independencia de la razón $\frac{dy}{dx}$, vamos á demostrar que son suficientes, es decir, que si X é Y satisfacen á las ecuaciones (2), la función $u = f(z) = X + iY$, tiene una derivada perfectamente determinada independiente del valor de $\frac{dy}{dx}$.

En efecto, supongamos satisfechas las condiciones (2) y hagamos recorrer á z en su plano una curva unicursal, es decir, una curva tal que x é y sean funciones reales, y que admiten derivada, de una nueva variable real t, supongamos

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t);$$

se tendrá entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$

Aplicando ahora á las funciones X é Y el teorema de las funciones compuestas, se tiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{du}{dt} = \frac{dX}{dt} + i\frac{dY}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt};$$

utilizando las expresiones (2) la fórmula anterior toma la

forma

$$\frac{du}{dz}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{dx}{dt}+\left(-\frac{\partial Y}{\partial x}+i\,\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt}=$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}+i\,\frac{dy}{dt}\right),$$

ó sea

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Análogamente se deduciría

$$\frac{du}{dz}=\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=\frac{\partial Y}{\partial y}-i\,\frac{\partial X}{\partial y},$$

y la proposición queda demostrada.

Nota.—Una vez determinada la derivada $\frac{du}{dz}=f'(z)$ de una función de variable compleja $u=f(z)$, su diferencial queda definida por la relación

$$du=f'(z).dz.$$

34. Funciones armónicas.—En la hipótesis de que las funciones X é Y tienen, no sólo derivadas parciales de primer orden respecto á x é y, sino que también las poseen de segundo, las condiciones (2) pueden reducirse á una forma general de suma trascendencia, y que es indispensable conocer. Si hallamos las derivadas parciales de las expresiones (2), tanto respecto á x como respecto á y, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x.\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 X}{\partial y.\partial x}=-\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\end{array}\right\},\qquad\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 X}{\partial x.\partial y}=\dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 Y}{\partial y.\partial x}\end{array}\right\}.$$

y de aquí se deduce inmediatamente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\},\qquad (6)$$

es decir, que las dos funciones X é Y satisfacen á la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=0,$$

en la cual se supone que Z es una función de las variables reales x é y. Las funciones que satisfacen á esta ecuación han recibido el nombre de *funciones armónicas*, así que la condición impuesta á las funciones X é Y en el párrafo anterior, equivale á decir que estas funciones deben ser armónicas (*).

Riemann y sus discípulos desarrollan toda la teoría de funciones de variable compleja basándose en esta propiedad de las funciones X é Y, es decir, observando que una función de una variable compleja no es más que el enlace por el símbolo i de dos funciones armónicas de las variables x é y. Nosotros seguiremos con preferencia el método de Cauchy, sin perjuicio de utilizar en algunas ocasiones los resultados obtenidos por Riemann.

35. Definición.—Una función de variable compleja que tiene una derivada perfectamente determinada ha recibido el nombre de *función monogena*, y también el de *función analítica*. Así, por ejemplo, la función

$$u = x^2 - y^2 + 2xyi$$

es una función monogena, pues se tiene

$$X = x^2 - y^2, \qquad Y = 2xy,$$

(*) Véase en la obra de Picard (20), tomo II, un estudio muy completo de las funciones armónicas.

y, por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0;$$

luego las funciones X é Y son armónicas. En cambio, la función

$$v = x^2 + y^2 + 2xyi$$

no es monogena, pues de

$$X = x^2 + y^2, \qquad Y = 2xy,$$

se deduce

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 2x,$$

y las condiciones (2) no quedan verificadas.

36. Nueva forma de las condiciones de monogeneidad.—Las condiciones (2) antes establecidas, necesarias y suficientes para que una función $u = f(z)$ sea monogena, toman una forma algo diferente en el caso de que la variable z tome la forma $z = \rho\,(cos.\,\alpha + i.\,sen.\,\alpha)$. En efecto, en esta hipótesis, se tiene

$$u = f[\rho(\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha)] = X + Yi,$$

siendo X é Y funciones de ρ y α; para distinguir este caso del anterior, hagamos

$$X = \varphi_1(\rho, \alpha) = H, \qquad Y = \varphi_2(\rho, \alpha) = K,$$

y, por tanto,

$$u = H + Ki.$$

Supongamos que las funciones H y K tienen, no sólo primeras sino también segundas derivadas parciales respecto á

las variables ρ y α; tendremos

$$du = dH + i.dK = \frac{\partial H}{\partial \rho}.d\rho + \frac{\partial H}{\partial \alpha}.d\alpha + i\left(\frac{\partial K}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial K}{\partial \alpha}d\alpha\right),$$

ó sea

$$du = \left(\frac{\partial H}{\partial \rho} + i\frac{\partial K}{\partial \rho}\right)d\rho + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} + i\frac{\partial K}{\partial \alpha}\right)d\alpha,$$

y, por tanto, como

$$dz = (\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha)d\rho + \rho(-\text{sen}.\alpha + i.\cos.\alpha)d\alpha,$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial \rho} + i\frac{\partial K}{\partial \rho}\right)d\rho + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} + i\frac{\partial K}{\partial \alpha}\right)d\alpha}{(\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha)d\rho + \rho(-\text{sen}.\alpha + i.\cos.\alpha)d\alpha}. \quad (7)$$

Para que la razón $\frac{du}{dz}$, sea independiente del valor que adquiere $\frac{d\alpha}{d\rho}$, será preciso que se verifique la relación

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial \rho} + i\frac{\partial K}{\partial \rho}}{\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha} = \frac{\frac{\partial H}{\partial \alpha} + i\frac{\partial K}{\partial \alpha}}{\rho(-\text{sen}.\alpha + i\cos.\alpha)} = \frac{\frac{\partial H}{\partial \alpha} + i\frac{\partial K}{\partial \alpha}}{i\rho(\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha)},$$

ó, lo que es igual,

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} + i\frac{\partial K}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} + i\frac{\partial K}{\partial \alpha}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial K}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}\right),$$

y, por consiguiente, que se verifiquen las dos relaciones

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}.\frac{\partial K}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial K}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}.\frac{\partial H}{\partial \alpha},$$

ó sea

$$\rho\frac{\partial H}{\partial \rho}=\frac{\partial K}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \alpha}=-\rho\frac{\partial K}{\partial \rho}, \tag{8}$$

análogas á las relaciones (2) antes obtenidas. Las fórmulas (8) pueden obtenerse también del modo siguiente: si z recorre un radio vector, entonces α es constante, $d\alpha=0$, y la expresión (7) se reduce á

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial u}{\partial \rho(\cos.\alpha+i.\text{sen}.\alpha)}=\frac{\frac{\partial H}{\partial \rho}+i\frac{\partial K}{\partial \rho}}{\cos.\alpha+i.\text{sen}.\alpha}. \tag{9}$$

Si ahora se supone que z recorre una circunferencia de radio ρ y con el origen por centro, ρ es constante, $d\rho=0$, y la expresión (7) se reduce á

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial u}{\rho(-\text{sen}.\alpha+i.\cos.\alpha)\partial\alpha}=\frac{\frac{\partial H}{\partial \alpha}+i\frac{\partial K}{\partial \alpha}}{i\rho(\cos.\alpha+i.\text{sen}.\alpha)}, \text{(10}$$

y la identificación de las expresiones (9) y (10), necesaria para que $\frac{du}{dz}$ tenga un valor independiente del de $\frac{d\alpha}{d\rho}$, nos conduce nuevamente á las fórmulas (8).

Las funciones H y K de ρ y α difieren esencialmente de las X é Y de x é y antes consideradas en que no son funciones armónicas, pues de las fórmulas (8) se deduce

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2}+d\rho\frac{\partial H}{\partial \rho}&=\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha.\partial \rho}\\ \rho\frac{\partial H}{\partial \rho.\partial \alpha}&=\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha.\partial \rho}&=-\rho\frac{\partial^2 K}{\partial \rho^2}-d\rho\frac{\partial K}{\partial \rho}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2}&=-\rho\frac{\partial^2 K}{\partial \rho.\partial \alpha}\end{aligned}\right\},$$

de las cuales se deducen

$$\left.\begin{aligned} \rho^2\frac{\partial^2 H}{\partial\rho^2}+\rho.d\rho.\frac{\partial H}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha^2}=0 \\ \rho^2\frac{\partial^2 K}{\partial\rho^2}+\rho.d\rho.\frac{\partial K}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 K}{\partial\alpha^2}=0 \end{aligned}\right\},$$

ecuaciones que aunque enlazan las derivadas parciales de primero y segundo orden de H y K no son idénticas á la ecuación de Laplace.

37. Serie derivada.—Si dada una serie de términos ordenados según las potencias crecientes, enteras y positivas, de una variable, y absoluta y uniformemente convergente dentro de un cierto círculo de convergencia, se toman las derivadas de sus diversos términos, la serie así obtenida recibe el nombre de *derivada* de la serie propuesta, así que si la serie dada representa la función $f(z)$, la derivada se representará por $f'(z)$ (*); y vamos á demostrar el siguiente teorema:

Toda serie absoluta y uniformemente convergente ordenada según las potencias crecientes, enteras y positivas de una variable, y su serie derivada, tienen el mismo círculo de convergencia.

En efecto, consideremos las series

$$\sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \qquad (1)$$

$$\sum_0^\infty n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1} + \dots, \qquad (2)$$

designemos por R el radio de convergencia de la serie (1), y vamos á demostrar que la serie (2) es también absoluta y

(*) En la obra de Briot y Bouquet (3) puede verse la demostración de que $f'(z)$ es la derivada de $f(z)$ en el concepto ordinario de derivada.

uniformemente convergente en el interior del círculo de radio R.

En efecto, para todo valor de z tal que $|z| = R_1 > R$, las series (1) y (2) son divergentes, la primera por hipótesis, y, por tanto, suponiendo $|a_n| = A_n$,

$$|a_n z^n| = A_n R_1^n > H,$$

designando por H un número positivo tan grande como se quiera, y la (2) también será divergente por tenerse

$$|n a_n z^{n-1}| = n A_n R_1^{n-1} = \frac{n}{R_1} \cdot A_n R_1^n > H.$$

Supongamos ahora que damos á z un valor tal que

$$|z| = R_2 < R;$$

por hipótesis la (1) es absoluta y uniformemente convergente, luego

$$lím. \, |a_n z^n| = lím. \, A_n R_2^n = 0.$$

Para probar que la (2) es también absoluta y uniformemente convergente, consideremos la serie de términos positivos

$$1 + 2\frac{R_2}{R} + 3\frac{R_2^2}{R^2} + \ldots + n\frac{R_2^{n-1}}{R^{n-1}} + \ldots,$$

que es convergente absoluta y uniformemente, porque la razón de dos términos consecutivos

$$n\frac{R_2^{n-1}}{R^{n-1}} : (n-1)\frac{R_2^{n-2}}{R^{n-2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{R_2}{R},$$

tiene por límite $\frac{R_2}{R} < 1$; y multipliquemos sus términos por los números

$$A_1, A_2 R, A_3 R^2, \ldots A_n R^{n-1}, \ldots,$$

que tienden hacia cero, la serie obtenida

$$A_1 + 2A_2R_2 + 3A_3R_2^2 + \dots + nA_nR_2^{n-1} + \dots$$

será convergente, y, por tanto, la (2) absoluta y uniformemente convergente, como se quería probar.

38. Derivadas de diversos órdenes.—Hemos demostrado que una función $u = f(z) = X + Yi$ será monogena, si se satisfacen las dos condiciones

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}; \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x};$$

y además que entonces se tiene

$$f'(z) = \frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Y ahora vamos á demostrar que, suponiendo que las funciones X é Y tienen derivadas parciales de segundo orden, la función $f'(z)$ es también monogena. En efecto, como se tiene

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x},$$

si hacemos $\frac{\partial X}{\partial x} = S$ y $\frac{\partial Y}{\partial x} = T$, la función $f'(z)$ tomará la forma

$$f'(z) = S + Ti;$$

ahora bien, se tiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y . \partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{\partial^2 X}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y . \partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial x . \partial y} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \end{aligned}\right\},$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial x};$$

luego $f'(z)$ es función monogena, y su derivada vendrá dada por la fórmula

$$f''(z) = \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial f'(z)}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f'(z)}{\partial y}.$$

De un modo análogo se demostraría que las funciones

$$f''(z), \qquad f'''(z), \ldots f^{(n)}(z), \ldots$$

son monogenas, suponiendo siempre que X é Y tienen derivadas parciales de los órdenes tercero, cuarto, etc.

Es evidente que las diferenciales correspondientes tendrán las formas

$$d^2u = f''(z).dz^2, \qquad d^3u = f'''(z)\,dz^3, \ldots d^nu = f^{(n)}(z).dz^n, \ldots$$

39. Propiedades.—A las funciones monogenas de variable compleja pueden extenderse sin dificultad las propiedades relativas á las reglas de derivación y diferenciación estudiadas para las funciones de variable real: las siguientes fórmulas contienen las más usuales y de mayor aplicación, debiendo advertir que las funciones en ellas empleadas se suponen monogenas, y que el signo D expresa la operación de la derivación:

$$D(u + v - w) = Du + Dv - Dw.$$

$$D(u.v.w) = v.w.Du + u.w.Dv + u.v.Dw.$$

$$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.Du - u.Dv}{v^2}.$$

$$D.\varphi(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dz} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dz}.$$

$$\left.\begin{array}{l} w = \varphi(u) \\ u = f(z) \end{array}\right\} Dw = \varphi'_u(u).f'_z(z).$$

La proposición que sigue es fundamental.

Teorema.—*Si dos funciones de variable compleja tienen derivadas iguales, para valores de la variable comprendidos en el interior de un área conexa, su diferencia, para valores de la variable contenidos en esa área, es una constante.*

En efecto, sean las dos funciones

$$u = X + Yi, \qquad v = X_1 + Y_1 i:$$

por hipótesis, se tiene, para valores de z contenidos en una cierta área conexa A,

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz},$$

ó, lo que es equivalente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial X_1}{\partial x} + i\frac{\partial Y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y} &= \frac{\partial X_1}{\partial y} + i\frac{\partial Y_1}{\partial y} \end{aligned}\right\},$$

ó sea

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{\partial X_1}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial Y_1}{\partial x} \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= \frac{\partial Y_1}{\partial y} \end{aligned}\right\},$$

y, por tanto,

$$X - X_1 = \text{const.}, \qquad Y - Y_1 = \text{const.}$$

de donde se deduce,

$$(X + Yi) - (X_1 + Y_1 i) = u - v = \text{const.},$$

como se quería demostrar.

40. Derivadas de las funciones elementales.
I. Función entera.—Consideremos en primer lugar la función potencial $u = z^m$, y demostremos que es monogena; para ello tenemos

$$u = z^m = (x + yi)^m = \left[x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \ldots\right] + i\left[\binom{m}{1} x^{m-1} y - \binom{m}{3} x^{m-3} y^3 + \ldots\right]$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} X = x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \ldots \\ Y = \binom{m}{1} x^{m-1} y - \binom{m}{3} x^{m-3} y^3 + \ldots \end{array}\right\},$$

de cuyas expresiones se deduce inmediatamente que quedan satisfechas las condiciones (2) (n.° 33) y, por tanto, que $u = z^m$ es una función monogena. Para hallar la derivada de esta función tendremos, aplicando el mismo procedimiento que cuando z es una variable real,

$$u + \Delta u = (z + \Delta z)^m = z^m + \binom{m}{1} z^{m-1} . \Delta z + \binom{m}{2} z^{m-2} . \Delta z^2 + \ldots,$$

$$\Delta u = \binom{m}{1} z^{m-1} . \Delta z + \binom{m}{2} z^{m-2} \Delta z^2 + \ldots,$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = m z^{m-1} + \binom{m}{2} z^{m-2} \Delta z + \ldots,$$

y de aquí se deduce

$$lím . \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{du}{dz} = m . z^{m-1},$$

y, por consiguiente,

$$du = m . z^{m-1} . dz.$$

En virtud de una de las fórmulas expuestas en el párrafo precedente, si se tiene la función entera

$$u = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m,$$

en la cual se supone m número entero y positivo, y los coeficientes $A_0, A_1, \dots A_{m-1}, A_m$ números constantes, reales ó complejos, se deducirá

$$\frac{du}{dz} = m\, A_0 z^{m-1} + (m-1)\, A_1 z^{m-2} + \dots + A_{m-1}.$$

II. Función exponencial.—La función exponencial viene definida (n.° 22) por la serie absoluta y uniformemente convergente para todo valor finito de z,

$$u = e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

luego, según lo antes demostrado (n.° 85), se tendrá

$$\frac{du}{dz} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = e^z,$$

fórmula idéntica á la obtenida en el caso de ser z un número real.

III. Funciones circulares directas.—Las funciones circulares *sen.z* y *cos.z* vienen definidas por las series absoluta y uniformemente convergentes para todo valor finito de z,

$$\left.\begin{aligned} u = \text{sen}.z &= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \\ v = \cos.z &= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \end{aligned}\right\},$$

luego, según lo antes demostrado (n.° 85), se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{d.\text{sen}.z}{dz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \cos.z \\ \frac{dv}{dz} &= \frac{d.\cos.z}{dz} = -\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} - \dots = -\,\text{sen}.z \end{aligned}\right\}.$$

La aplicación de las fórmulas dadas en el número prece-

dente nos da inmediatamente

$$D.\text{tg}.z = \frac{1}{\cos^2.z}, \qquad D.\text{ctg}.z = -\frac{1}{\text{sen}^2.z},$$

$$D.\text{sec}.z = \frac{\text{sen}.z}{\cos^2.z}, \qquad D.\text{cosec}.z = -\frac{\cos.z}{\text{sen}^2.z}$$

IV. Función logarítmica.—Según sabemos, la función inversa de la exponencial $z = e^u$ es la función logarítmica $u = l((z))$; y si suponemos $z = \rho(\cos.\theta + i.\text{sen}.\theta)$, se tiene $u = l\rho + (\theta + 2k\pi)i$, es decir, que u admite infinitas determinaciones, y ahora vamos á probar que cada una de estas determinaciones tiene una derivada perfectamente definida. Para demostrarlo, sean z_1 y z_2 dos valores muy próximos de la variable, y $u_1 = l((z_1))$, $u_2 = l((z_2))$ los valores correspondientes de la determinación elegida de la función u: se tendrá

$$\frac{l(z_1) - l(z_2)}{z_1 - z_2} = \frac{u_1 - u_2}{e^{u_1} - e^{u_2}}.$$

Cuando z_2 tienda hacia z_1, $| l(z_1) - l(z_2) |$ tiende hacia cero, y como entonces u_2 tiende hacia u_1, el cociente

$$\frac{e^{u_1} - e^{u_2}}{u_1 - u_2}$$

tiene por límite la derivada de e^{u_1}, es decir, $e^{u_1} = z_1$; por consiguiente, el límite de la razón inversa será $\frac{1}{z_1}$, es decir, que se tendrá

$$lim.\frac{l(z_1) - l(z_2)}{z_1 - z_2} = \frac{1}{z_1};$$

y de un modo general se tiene

$$u = l((z)), \qquad D.u = \frac{1}{z}.$$

V. Funciones circulares inversas.—Razonando de una

manera análoga á como lo hemos hecho en el caso anterior, se obtiene

$$D.\text{arc. sen.}z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad D.\text{arc.cos.}z = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$D.\text{arc.tg.}z = \frac{1}{1+z^2}, \quad \text{etc.}$$

Operando directamente sobre las fórmulas obtenidas en el número 81, se llegaría á los mismos resultados que anteceden. Así, de la expresión

$$u = \text{arc. tg.}z = \frac{1}{2i}\left[l((1+zi)) - l((1-zi))\right],$$

se deduce inmediatamente

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{1+zi} - \frac{-i}{1-zi}\right] = \frac{1}{1+z^2}.$$

41. Representación conforme.—Dada una función $u = f(z) = X + Yi$, y supuesta esta función continua y monogena, las relaciones que enlazan las derivadas parciales de las funciones X é Y hacen presumir que las representaciones geométricas de la variable y la función en el doble plano de que anteriormente hemos hablado (n.° 6), poseen alguna propiedad especial que las caracterice, ó, cuando menos, que presente alguna utilidad y ventaja práctica ó teórica de importancia. Para investigar esta propiedad demos á z los valores z_1 y z_2, contenidos ambos en el área conexa en cuyo interior la función $u = f(z)$ es continua y monogena, se tendrá

$$u_1 = f(z_1), \qquad u_2 = f(z_2)$$

y

$$\frac{u_1 - u_2}{z_1 - z_2} = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = f'(z_1) + \varepsilon,$$

siendo ε un número real ó imaginario, que tiene por límite

cero cuando el límite de $|z_1 - z_2|$ es nulo; si hacemos

$$z_1 - z_2 = \rho(\cos.\theta + i.\text{sen}.\theta), \quad f'(z_1) = r(\cos.\alpha + i.\text{sen}.\alpha),$$

y designamos por ε_1 y ε_2 los incrementos que deben darse á r y α para obtener el módulo y el argumento de $f'(z_1) + \varepsilon$, es evidente que ε_1 y ε_2 tenderán hacia cero al propio tiempo que ε, y, por tanto, que $|z_1 - z_2|$. La expresión anterior tomará la forma

$$\frac{u_1 - u_2}{z_1 - z_2} = (r + \varepsilon_1)[\cos.(\alpha + \varepsilon_2) + i.\text{sen}.(\alpha + \varepsilon_2)],$$

ó sea

$$u_1 - u_2 = (r + \varepsilon_1)\rho\,[\cos.(\theta + \alpha + \varepsilon_2) + i.\text{sen}.(\theta + \alpha + \varepsilon_2)].$$

Supongamos ahora que el punto z_1 es fijo y determinado, y el z_2 movible y que se acerca al z_1 siguiendo la línea mz_1 ó la nz_1 (fig. 5.ª). Cuando el punto z_2 tiende á confundirse con el z_1 siguiendo la línea z_2mz_1, el ángulo θ tiende á confundir-

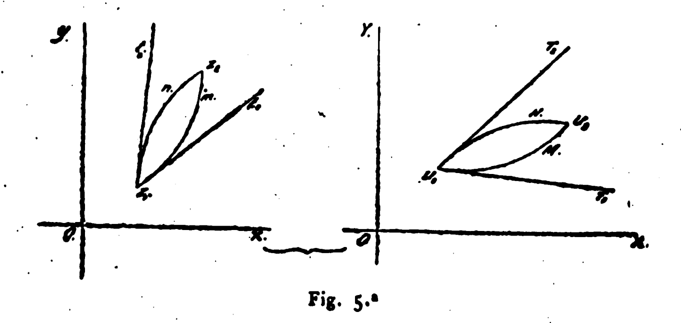


Fig. 5.ª

se con el que la tangente z_1t_1 forma con el eje ox, ángulo que designaremos por θ_1, y el argumento de $u_1 - u_2$ tiende hacia $\theta_1 + \alpha$. Si ahora suponemos que z_2 se aproxima á z_1 siguiendo la línea z_2nz_1, el argumento θ tiende hacia el ángulo

que la tangente $z_1 t_2$ forma con el eje ox, ángulo que designaremos por θ_2, y el argumento de $u_1 - u_2$ tenderá al propio tiempo hacia $\theta_2 + \alpha$. Pero entonces se tiene

$$\text{áng.}\, t_1 z_1 t_2 = \theta_1 - \theta_2,$$

y $$\text{áng.}\, T_1 u_1 T_2 = (\alpha + \theta_1) - (\alpha + \theta_2) = \theta_1 - \theta_2,$$

luego *las curvas descritas por el punto función* u *se cortan bajo los mismos ángulos que las descritas por el punto variable* z. Esta importantísima propiedad que goza la representación geométrica que hemos adoptado es de utilidad suma: una representación geométrica que goza de la propiedad enunciada, recibe el nombre de *representación conforme.*

Corolario.—Se deduce de lo anterior que toda función monogena da un medio de transformación de figuras planas en el cual se conservan los ángulos. Así que, si el punto z describe dos series de líneas ortogonales, el punto u describirá al propio tiempo otras dos series de líneas ortogonales.

Nota.—Conviene observar que la demostración que precede no es válida si $f'(z) = 0$.

Aplicación.—La aplicación más sencilla que puede presentarse es la del empleo de la función $u = \frac{1}{z}$, que da un medio de transformación de figuras, del cual puede deducirse sencillamente el de transformación por radios vectores recíprocos.

En efecto, de $u = \frac{1}{z}$ se deduce $uz = 1$, y, por tanto,

$$(uz)^n = 1,$$

siendo n un número entero y positivo. Si hacemos

$$z = \rho(\cos.\theta + i.\text{sen}.\theta),$$

se deduce

$$u = \frac{1}{\rho(\cos.\theta + i.\text{sen}.\theta)} = \frac{1}{\rho}(\cos.\theta - i.\text{sen}.\theta)$$

$$= \frac{1}{\rho}\,[\cos.(-\theta) + i.\text{sen}.(-\theta)];$$

por consiguiente, á un punto z (fig. 6.ª) corresponde un punto u tal que ox es bisectriz del ángulo zou, y además que el producto $oz.ou = 1$. Si z recorre el vector om, alejándose de o, u recorrerá el ou acercándose á o; si z recorre una curva za, el punto u describirá otra curva uA, que forma con ou el mismo ángulo que za forma con om; etcétera.

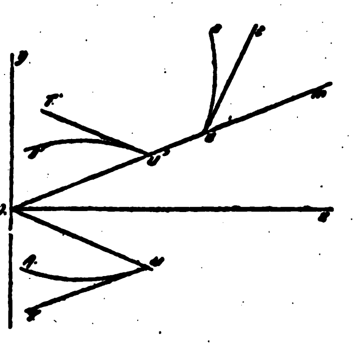


Fig. 6.ª

Es evidente que si hacemos girar alrededor de ox la parte inferior de la figura 6.ª hasta que ou coincida con om, la curva uA tomará la posición $u'A'$, y esta curva es la transformada por radios vectores recíprocos de la za.

Ejemplo.—Otro ejemplo muy sencillo lo proporciona la función $u = z^2$. Hagamos

$$z = a + bi = r(\text{cos.}\,0 + i.\,\text{sen.}\,0), \qquad u = \rho(\text{cos.}\,\alpha + i.\,\text{sen}\,\alpha)$$

se deducirá inmediatamente

$$u = z^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$

y también

$$\rho(\text{cos.}\,\alpha + i.\,\text{sen.}\,\alpha) = r^2(\text{cos.}\,2\theta + i.\,\text{sen.}\,2\theta),$$

por consiguiente,

$$\rho = r^2 = a^2 + b^2, \qquad \alpha = 2\theta,$$

y además

$$\left.\begin{array}{l}\rho.\,\text{cos.}\,\alpha = r^2.\,\text{cos.}\,2\theta = a^2 - b^2 \\ \rho.\,\text{sen.}\,\alpha = r^2.\,\text{sen.}\,2\theta = 2ab\end{array}\right\}.$$

Si z recorre la recta $b = r.sen.\theta$, u recorrerá la curva

$$\rho.\cos.\alpha = a^2 - b^2 = \rho - 2b^2, \quad \text{ó sea} \quad \rho = \frac{2b^2}{1 - \cos.\alpha}; \quad (1)$$

y si z recorre la recta $a = r.cos.\theta$, u recorrerá la curva

$$\rho.\cos.\alpha = a^2 - b^2 = 2a^2 - \rho, \quad \text{ó sea} \quad \rho = \frac{2a^2}{1 + \cos.\alpha}, \quad (2)$$

y las ecuaciones (1) y (2) representan dos parábolas homofocales.

42. Nuevas definiciones.—Una función de una variable compleja $u = f(z)$ se dice que es ***sinéctica***, y mejor ***holomorfa*** (de forma análoga á las funciones enteras) en un área conexa A, si satisface á las condiciones siguientes:

1.ª A todo valor de z contenido en A corresponde un valor finito y perfectamente determinado de u.

2.ª La función u es continua cuando z recorre el área A.

3.ª La función u admite una derivada única y perfectamente determinada para todo valor de z contenido en A.

Es decir, que una función $u = f(z)$ se dirá que es ***sinéctica*** ú *holomorfa* en un área conexa, si para todo valor de z contenido en esa área es *finita*, *continua*, *monodroma*, y *monogena*.

Un punto para el cual el módulo de la función $f(z)$ se anula, se dice que es *un punto raíz*, ó mejor, *un cero* de esta función.

Una función monodroma puede no ser holomorfa en toda la extensión de un área plana, sino que en esta pueden existir puntos para los cuales la función cese de ser continua, ó adquiera un valor infinito, ó su derivada no esté perfectamente determinada; estos puntos reciben el nombre de *puntos críticos* de la función. Sin pretender dar una clasificación de estos puntos, sí diremos que los más notables y los que en nuestro estudio ofrecen mayor interés, son aquellos en los cuales la función se hace infinita, y que estos puntos se dividen en dos clases: ***polos***, ***infinitos simples*** ó ***puntos de discontinuidad de primera especie*** aquellos puntos tales que si para $z = a$, $|f(z)| = \infty$, á un valor $|z - a|$ y de

argumento cualquiera corresponde un valor sumamente grande de $|f(z-a)|$, y un valor infinitamente pequeño de $\frac{1}{|f(z-a)|}$, es decir, aquellos puntos en cuyo dominio la razón $\frac{1}{f(z)}$ es función holomorfa. Y que se denominan *puntos críticos esenciales*, ó *puntos de discontinuidad de segunda especie* aquellos para los cuales la razón $\frac{1}{f(z)}$ es discontinua al propio tiempo que $f(z)$. Fácil es ver que si una función no admite más puntos críticos que polos, todo polo de la función $f(z)$ es un cero de la razón $\frac{1}{f(z)}$.

Las funciones racionales de la forma $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ no admiten más puntos críticos que polos, y estos polos están determinados por las raíces de la ecuación $\psi(z)=0$. Toda función que no admite más puntos críticos que polos, se denomina *función meromorfa*, es decir, de forma análoga á las funciones racionales fraccionarias.

De lo que precede podemos deducir que los puntos de un área plana cualquiera pueden clasificarse con relación á una cierta función $u=f(z)$ en

Puntos ordinarios; si para los valores correspondientes de z la función u es continua, monodroma y monogena.

Polos; si para los valores correspondientes de z la función u se hace infinita, pero la $\frac{1}{u}$ es continua, monodroma y monogena.

Y *puntos críticos esenciales;* aquellos en que para los valores correspondientes de z la función u se hace infinita, y la $\frac{1}{u}$ no es continua.

43. Esfera y plano antípoda.—Para estudiar las variaciones y propiedades de una función en el caso que la variable reciba valores de módulo muy grande, se suele acudir al artificio de hacer $z=\frac{1}{z'}$, sustituir este valor en la función, y dar á la nueva variable valores de módulo muy pe-

queño. Esta transformación da origen á una representación geométrica tan útil como curiosa: sea OO' (fig. 7.ª) una esfera de diámetro igual á la unidad, en los extremos de un diámetro OO' tracemos dos planos tangentes, y consideremos además un plano meridiano fijo $xOO'x'$; sobre cada uno de los planos tangentes tomemos como eje de abscisas su intersección, Ox, $O'x'$, con el plano meridiano, y como ejes de ordenadas las rectas Oy, $O'y'$ perpendiculares á este plano.

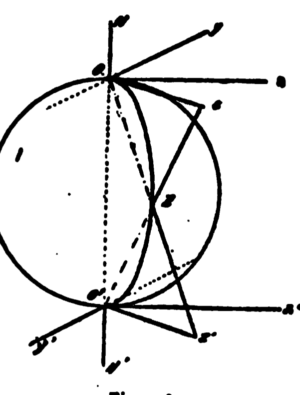


Fig. 7.ª

Sea z el punto que representa un valor de la variable en el plano xOy, unamos z con O', la recta $O'z$ corta á la superficie esférica en un punto Z; unamos Z con O, y sea z' el punto donde la recta OZ corta al plano $x'O'y'$: decimos que supuestas enlazadas dos variables imaginarias por la relación $z = \frac{1}{z'}$, si el punto z representa la variable z, el z' puede representar á la z'. En efecto, los triángulos $OO'z$ y $OO'z'$ son semejantes, por ser rectángulos y tener iguales los ángulos $OO'z = Oz'O'$, luego se tiene

$$\frac{OO'}{Oz} = \frac{O'z'}{OO'}, \qquad \text{ó sea} \qquad \frac{1}{Oz} = \frac{O'z'}{1},$$

y, por tanto,

$$Oz = \frac{1}{O'z'}. \tag{1}$$

La posición de las rectas Oz y $O'z'$ en los planos tangentes quedará determinada por los ángulos θ y θ' que forman con los ejes fijos Ox y $O'x'$ situados en el plano meridiano principal, y conviniendo en contar los ángulos positivos en un

sentido tal que un observador situado sobre uno ú otro plano, con los pies en O, ó en O', y la cabeza fuera de la esfera, en N, ó en N', vea girar el radio vector de derecha á izquierda. De este modo las dos rectas Oz y $O'z'$ contenidas en un mismo plano meridiano tienen argumentos θ y θ' que satisfacen á una de las dos relaciones

$$\theta + \theta' = 0, \qquad \theta + \theta' = 2\pi,$$

y, por consiguiente, si suponemos

$$z = r(\cos.\,\theta + i.\,\text{sen.}\,\theta), \qquad z' = r'(\cos.\,\theta' + i.\,\text{sen.}\,\theta'),$$

la relación (1), que nos da $r = \frac{1}{r'}$, y las dos anteriores nos dan

$$z = \frac{1}{z'},$$

como se quería demostrar.

Observemos ahora, que á cada curva descrita por el punto z en el plano xOy corresponde una curva descrita por z' en el plano $x'O'y'$. Si el punto z describe, en sentido directo, una curva cerrada que no contenga en su interior el origen O, el punto z' describirá, también en sentido directo, otra curva cerrada que no contendrá en su interior el origen O'; á puntos situados en el $\left\{\begin{matrix}\text{interior}\\ \text{exterior}\end{matrix}\right\}$ del área limitada por la primera curva corresponderán puntos situados en el $\left\{\begin{matrix}\text{interior}\\ \text{exterior}\end{matrix}\right\}$ del área limitada por la segunda. Por el contrario, si z describe, siempre en sentido directo, una curva cerrada, que contiene en su interior el origen O, la curva descrita por z' comprenderá en su interior el punto O', y estará descrita en sentido retrógrado; á puntos contenidos en el $\left\{\begin{matrix}\text{interior}\\ \text{exterior}\end{matrix}\right\}$ del área limitada por la primera curva corresponden puntos situados en el $\left\{\begin{matrix}\text{exterior}\\ \text{interior}\end{matrix}\right\}$ del área limitada por la segunda. Si el radio vector de un punto de la curva descrita por z aumenta indefinidamente, el correspondiente á la curva descrita por z' tiende hacia cero; de manera que el estudio de la función $u = f(z)$ para valores muy grandes de z

se refiere al de la función $u = f\left(\frac{1}{z'}\right)$ para valores muy pequeños de z'.

Nota.—Es evidente que el estudio de los valores de la función podría hacerse también estudiando la curva descrita por el punto Z sobre la superficie de la esfera, punto que está perfectamente determinado para cada valor de z, pero como no vamos á emplear este método en nuestro trabajo, no detallamos este procedimiento de transformación.

Ejemplos.—*I.* Apliquemos el método que antecede á algunas funciones sencillas. Consideremos, en primer lugar, la función entera

$$u = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m,$$

y supongamos que z recibe un valor de módulo infinitamente grande; el valor correspondiente del módulo de u será también indefinidamente grande, y para facilitar el estudio hagamos $z = \frac{1}{z'}$, lo que nos da

$$u = \frac{A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \ldots + A_{m-1} z'^{m-1} + A_m z'^m}{z'^m};$$

para valores de z' de módulo muy pequeño, el módulo de u será sumamente grande; pero si hacemos $u = \frac{1}{u'}$, se deducirá

$$u' = \frac{z'^m}{A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \ldots + A_m z'^m},$$

y cuando $| z' | < \varepsilon$, siendo ε un número positivo tan pequeño como deseemos, el módulo de u' tiende hacia cero, y la función u' es holomorfa en el dominio del punto O', luego este punto O' es un polo de la función u.

II. Consideremos ahora la fracción racional

$$u = \frac{A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m}{B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_n}.$$

El estudio de esta función para valores de z de módulo indefinidamente grande es algo complicado, pero si hacemos $z = \frac{1}{z'}$, se tiene

$$u = z'^{n-m} \frac{A_0 + A_1 z' + \dots + A_m z'^m}{B_0 + B_1 z' + \dots + B_n z'^n}.$$

Si $m < n$ se ve inmediatamente que la función es holomorfa para valores de z' de módulo muy pequeño, es decir, en el dominio del punto $z' = 0$. Pero si $m > n$, el módulo de u crece indefinidamente al tender hacia cero el de z'; pero, como si hacemos $u = \frac{1}{u'}$, se deduce

$$u' = z'^{m-n} . \frac{B_0 + B_1 z' + \dots + B_n z'^n}{A_0 + A_1 z' + \dots + A_m z'^m},$$

u' es una función holomorfa, luego el punto $z = 0$ es un polo de u.

CAPÍTULO VI

Integración.

44. Preliminares.—Si se tiene una función de variable real $f(x)$, finita en todo el intervalo de x_0 á x_n de su variable, y designamos por x_α un valor de esta variable comprendido entre x_0 y x_n, por los elementos de Cálculo infinitesimal se sabe que

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = lim. \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} f(x_\alpha).\Delta x_\alpha\,,$$

cuando Δx_α tiende hacia cero. Si tratamos de extender esta definición á la integral $\int_{z_0}^{z_n} f(z)\,dz$, en la hipótesis de ser z una variable compleja, nos encontramos con la dificultad de que la variable z para pasar del punto z_0 al z_n puede seguir caminos muy diversos, debiendo estudiar la influencia que el camino recorrido por z puede ejercer en el valor de la integral, caso de que ésta tenga un valor perfectamente definido para cada camino que z recorra, estudio que no hay que realizar en las funciones de variable real, porque en ellas el camino que x recorre es único y está siempre representado por un segmento del eje de las x.

Sabemos, además, que si se supone $f(x) = F'(x)$, siendo $f(x)$ y $F(x)$ funciones de variable real, se tiene

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} F'(x)\,dx = F(x_n) - F(x_0);$$

al tratar de extender esta propiedad fundamental á las funciones de variable compleja se tendría la forma

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_n} F'(z)\,dz = F(z_n) - F(z_0),$$

y si la función $F(z)$, supuesta monogena, no es monodroma, el segundo miembro de la expresión anterior no estará bien determinado. Así, en el supuesto de que á las funciones de variable compleja se les puedan aplicar las fórmulas estudiadas para las funciones de variable real, si hacemos

$$z_0 = r_0(\cos.\theta_0 + i.\operatorname{sen}.\theta_0), \qquad z_n = r_n(\cos.\theta_n + i.\operatorname{sen}.\theta_n),$$
$$F(z) = l((z)), \qquad f(z) = F'(z) = \frac{1}{z},$$

se obtiene

$$\int_{z_0}^{z_n} \frac{dz}{z} = l((z_n)) - l((z_0)) = [lr_n + (\theta_n + 2k\pi)i] - [lr_0 + (\theta_0 + 2k'\pi)i],$$

función que tiene infinitos valores, y que, por consiguiente, no está bien determinada.

Las indicaciones que preceden nos muestran la necesidad de comenzar el estudio de las integrales definidas de las funciones complejas tomadas entre límites imaginarios, por demostrar la existencia y propiedades de estas integrales para un camino determinado de la variable, y estudiar después las alteraciones que el cambio de línea recorrida por la variable lleva al valor de la integral.

45. Existencia de la integral.—La proposición que sigue, de la cual damos dos demostraciones que difieren más en la forma que en el fondo, define de un modo preciso la integral definida de una función de variable compleja entre dos valores de la variable cuando el camino que ésta sigue para ir de un punto á otro está determinado.

TEOREMA.—*Sea* f(z) *una función monogena, finita y continua, cuando el punto* z *describe la curva* z_0z_n (fig. 8.ª). *Desig-*

nemos por $z_1, z_2, \dots z_{n-1}$, *puntos intermedios tomados sobre la curva, y vamos á demostrar que la suma*

$$S = (z_1 - z_0) f(z_0) + (z_2 - z_1) f(z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) f(z_{n-1}) \quad (1),$$

tiende hacia un límite finito y determinado, cuando el número de puntos intermedios crece indefinidamente.

Primera demostración.—Supongamos que la curva $z_0 z_n$ es unicursal, es decir, supongamos que al recorrer $z = x + iy$ la curva dada, x é y se pueden mirar como funciones continuas, y que tienen derivada, de una nueva variable real t, de manera que se tenga

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t),$$

y, por tanto,

$$z = \varphi_1(t) + i . \varphi_2(t) = \varphi(t).$$

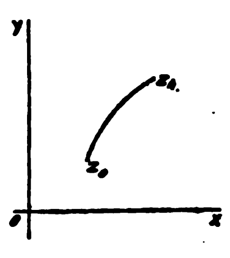


Fig. 8.ª

Evidentemente se tiene

$$\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + \delta'_0],$$
$$\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_2(t_0) + \delta''_0],$$

designando δ'_0 y δ''_0 dos infinitamente pequeños que se anulan al propio tiempo que $t_1 - t_0$: de las expresiones precedentes se deduce

$$z_1 - z_0 = [\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0)] + i[\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0)] =$$
$$(t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + i\varphi'_2(t_0) + \delta'_0 + i\delta''_0] = (t_1 - t_0)[\varphi'(t_0) + \delta_0],$$

haciendo $\delta_0 = \delta'_0 + i\delta''_0$. De igual modo se tendría

$$\left.\begin{array}{l} z_2 - z_1 = (t_2 - t_1)[\varphi'(t_1) + \delta_1] \\ z_3 - z_2 = (t_3 - t_2)[\varphi'(t_2) + \delta_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n - z_{n-1} = (t_n - t_{n-1})[\varphi'(t_{n-1}) + \delta_{n-1}] \end{array}\right\},$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (1), se obtiene

$$S=(t_1-t_0)[f(z_0)\varphi'(t_0)+\delta_0.f(z_0)]+(t_2-t_1)[f(z_1)\varphi'(t_1)+\delta_1.f(z_1)]+\dots+$$
$$(t_n-t_{n-1})[f(z_{n-1})\varphi'(t_{n-1})+\delta_{n-1}.f(z_{n-1})]=(t_1-t_0)f(z_0)\varphi'(t_0)+$$
$$(t_2-t_1)f(z_1)\varphi'(t_1)+\dots+(t_n-t_{n-1})f(z_{n-1})\varphi'(t_{n-1})+$$
$$\left|(t_1-t_0)f(z_0)\delta_0+(t_2-t_1)f(z_1)\delta_1+\dots+(t_n-t_{n-1})f(z_{n-1})\delta_{n-1}\right|.$$

Designando por M el valor máximo del módulo de $f(z)$ para los valores de z situados en la curva y comprendidos entre z_0 y z_n, y por ε al mayor módulo de las δ, el módulo de la parte comprendida entre corchetes en la expresión anterior, que designaremos por A, es

$$A < M.\varepsilon.(t_n-t_0),$$

valor que tiende hacia cero al mismo tiempo que ε, ó sea que las δ, ó, lo que es igual, cuando el número de puntos z situados sobre la línea z_0z_n crece indefinidamente.

Respecto á la primera parte de la expresión anterior, observemos que, en general, se podrá escribir

$$f(z).\varphi'(t)=\psi_1(t)+i.\psi_2(t),$$

y en tal hipótesis la fórmula referida se convierte en

$$S=[(t_1-t_0)\psi_1(t_0)+(t_2-t_1)\psi_1(t_1)+\dots+(t_n-t_{n-1})\psi_1(t_{n-1})]+$$
$$i[(t_1-t_0)\psi_2(t_0)+(t_2-t_1)\psi_2(t_1)+\dots+(t_n-t_{n-1})\psi_2(t_{n-1})];$$

ahora bien, cada una de estas sumas tiende hacia los límites

$$\int_{t_0}^{t_n}\psi_1(t)\,dt, \qquad \int_{t_0}^{t_n}\psi_2(t)\,dt,$$

cuando el número de puntos z considerados crece indefinidamente, luego se tendrá

$$lim.S=\int_{t_0}^{t_n}\psi_1(t)dt+i\int_{t_0}^{t_n}\psi_2(t)dt=\int_{t_0}^{t_n}[\psi_1(t)+i\psi_2(t)]dt=$$
$$\int_{t_0}^{t_n}f(z).\varphi'(t)dt=\int_{t_0}^{t_n}f[\varphi(t)].\varphi'(t)\,dt=\int_{z_0}^{z_n}f(z)dz;$$

este límite es el que define el valor de la integral

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)\,dz$$

tomada á lo largo de la curva $z_0 z_n$.

Segunda demostración.—En el supuesto de ser $z = x + yi$, y $f(z) = X + Yi$, se tiene

$$S = \sum_{z_0}^{z_n} f(z).\Delta z = \sum_{z_0}^{z_n} (X + Yi)(\Delta x + i\Delta y) =$$

$$\sum_{z_0}^{z_n} [(X.\Delta x - Y.\Delta y) + i(X.\Delta y + Y.\Delta x)] =$$

$$\sum_{z_0}^{z_n} \left(X - Y\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x + i\sum_{z_0}^{z_n}\left(Y + X\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x,$$

y en el límite se deduce, por ser funciones de variable real las expresiones á que afecta el signo Σ,

$$lím.\, S = \int_{z_0}^{z_n} f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x_n}\left(X - Y\frac{dy}{dx}\right)dx + i\int_{x_0}^{x_n}\left(Y + X\frac{dy}{dx}\right)dx; \qquad (2)$$

determinada la curva $z_0 z_n$, de su ecuación deduciremos los valores de y y de $\frac{dy}{dx}$ para cada valor de x, y sustituídos en la fórmula (2) podrá verificarse la integración. Y podrá verificarse la integración, porque es sabido que una expresión de la forma $Mdx + Ndy$, en la cual M y N son funciones reales de x é y que tienen derivadas parciales, es integrable si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, y como la función $f(z)$ se ha supuesto monogena, se tiene

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

y las dos expresiones $X.dx - Y.dy$, $Y.dx + Xdy$, son integrables por simples cuadraturas.

La fórmula (2) tiene la ventaja de que es susceptible de aplicaciones prácticas muy sencillas.

Nota.—A la línea $z_0 z_n$, á lo largo de la cual se ha definido la integral de la función propuesta, se le da algunas veces el nombre de ***kilo de integración.***

Ejemplo.—Integrar la expresión $f(z)dz = z^2.dz$ á lo largo de una recta de longitud 1, que pase por el origen y forme un ángulo de 45° con el eje Ox. La ecuación de la recta es

$$x = y, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad dx = dy,$$

los valores de x correspondientes á los extremos de z, son

$$x_0 = 0, \qquad x_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

al mismo tiempo, de

$$z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

se deduce

$$X = x^2 - y^2, \qquad Y = 2xy,$$

y para todos los puntos del camino de integración

$$X = 0, \qquad Y = 2x^2.$$

Las expresiones que hay que integrar se reducen á

$$Xdx - Ydy = -2x^2dx, \qquad Ydx + Xdy = 2x^2dx,$$

luego se tendrá

$$\int_{z_0}^{z_n} z^2 dz = -\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x^2 dx + i\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x^2dx = \frac{\sqrt{2}}{6}(i-1).$$

Corolario I.—Si la función $f(z)$ continúa siendo de la forma $X + Yi$, pero z se hace real, para lo cual basta suponer $y = 0$, las expresiones X é Y serán funciones reales de x, por ejemplo,

$$X = \varphi_1(x), \qquad Y = \varphi_2(x),$$

la función propuesta se convierte en

$$f(z) = f(x) = \varphi_1(x) + i.\varphi_2(x),$$

la curva seguida por z en la integración se reduce á un segmento del eje de las x, $\frac{dy}{dx} = 0$, y la fórmula (2) se reduce á

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)dz = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} \varphi_1(x)\,dx + i\int_{x_0}^{x_n} \varphi_2(x)\,dx.$$

Corolario II.—Tratemos de hallar un límite superior del valor del módulo de la suma S(1). Designemos por M el valor máximo del módulo de $f(z)$ para los valores de z situados en la curva y comprendidos entre z_0 y z_n: sea l la longitud de la curva $z_0 z_n$, y sean $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ las longitudes de las cuerdas de los arcos $z_0 z_1$, $z_1 z_2$, ... $z_{n-1} z_n$, cuerdas que son los módulos de las diferencias $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, ... $z_n - z_{n-1}$; se tiene evidentemente

$$|\, S \,| \leq M(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}) \leq Ml,$$

y, por lo tanto,

$$\text{mód.} \int_{z_0}^{z_n} f(z)dz \leq \int_{z_0}^{z_n} |\, f(z).dz \,| \leq Ml.$$

Corolario III.—Si la línea l de integración se descompone en varios sumandos

$$l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n,$$

la misma demostración del teorema nos dice que (*)

$$\int_l f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz + \ldots + \int_{l_n} f(z)dz.$$

Corolario IV.—La integral de una función de z_0 á z_n sobre

(*) La integral de una función á lo largo de una curva de longitud l la anotaremos en la forma $\int_l$, cuando no sea preciso señalar los puntos extremos de esta línea.

una línea es igual y de signo contrario á la integral de la misma función tomada sobre la misma línea, pero de z_n á z_0, es decir, que

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)dz = -\int_{z_n}^{z_0} f(z)dz,$$

puesto que en el valor de S, de la fórmula (1), los valores de $f(z)$ no varían, pero las diferencias $z_h - z_{h-1}$ cambian todas de signo.

Corolario V. — A las integrales que acabamos de definir pueden aplicarse las propiedades de las integrales ordinarias; por ejemplo, el método de integración por sustitución, ó por cambio de variable, puede extenderse en la forma siguiente. Consideremos la integral

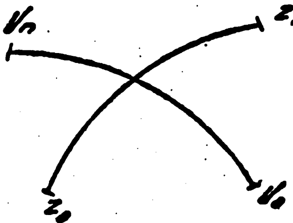


Fig. 9.ª

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)dz,$$

y hagamos $z = \varphi(v)$; suponiendo que $\varphi(v)$ es una función monogena, se tendrá $dz = \varphi'(v).dv$, y en tanto que la variable z recorre la línea $z_0 z_n$ supongamos que v recorre la $v_0 v_n$ (figura 9.ª): vamos á probar que

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)dz = \int_{v_0}^{v_n} f[\varphi(v)]\varphi'(v)dv.$$

En efecto, razonando como lo hemos hecho en el teorema fundamental, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} z_1 - z_0 = (v_1 - v_0)[\varphi'(v_0) + \delta_0] \\ z_2 - z_1 = (v_2 - v_1)[\varphi'(v_1) + \delta_1] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n - z_{n-1} = (v_n - v_{n-1})[\varphi'(v_{n-1}) + \delta_{n-1}] \end{array}\right\},$$

y sustituyendo en la suma (1) se deduce

$$S = (v_1 - v_0)f(z_0)\varphi'(v_0) + (v_2 - v_1)f(z_1)\varphi'(v_1) + \dots +$$
$$(v_n - v_{n-1})f(z_{n-1})\varphi'(v_{n-1}) +$$
$$[(v_1 - v_0)f(z_0)\delta_0 + (v_2 - v_1)f(z_1)\delta_1 + \dots + (v_n - v_{n-1})f(z_{n-1})\delta_{n-1}].$$

Si designamos por M el mayor valor del módulo de $f(z)$ á lo largo de la curva $z_0 z_n$, por ε el mayor de los módulos de las δ, y por l' la longitud de la línea $v_0 v_n$ de integración, el módulo de la parte comprendida entre corchetes en la expresión anterior, módulo que designaremos por A, es

$$A \leq M\varepsilon l',$$

cantidad que tiende hacia cero con ε, por tanto

$$lim.\ S = lim.\ [(v_1 - v_0)f(z_0)\varphi'(v_0) + \dots + (v_n - v_{n-1})f(z_{n-1})\varphi'(v_{n-1})],$$

ó sea

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)dz = \int_{v_0}^{v_n} f[\varphi(v)]\varphi'(v)dv,$$

como se quería demostrar.

Nota.—Obsérvese que aunque en esta demostración se emplea la misma marcha que en la primera de las dadas para el teorema fundamental, existe la diferencia esencial de que la variable auxiliar t, allí empleada, es real, en tanto que aquí la variable v es imaginaria como lo es la z.

Corolario VI.—Las reglas de diferenciación bajo el signo integral se aplican á las integrales tomadas entre límites imaginarios, con restricciones análogas á las hechas en el caso de las integrales ordinarias. Por ejemplo, supongamos que se desea diferenciar con relación á α la integral

$$u = \int_{z_0}^{z_n} f(z,\alpha)dz;$$

designando por $\Delta\alpha$ un incremento arbitrario dado á α, y por ε un infinitamente pequeño, se tiene

$$\frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \int_{z_0}^{z_n} \frac{f(z,\alpha+\Delta\alpha) - f(z,\alpha)}{\Delta\alpha} dz = \int_{z_0}^{z_n} \frac{\partial f}{\partial\alpha} dz + \int_{z_0}^{z_n} \varepsilon dz; \quad (8)$$

claro es que suponemos á $f(z, \alpha)$ función monogena de α, y por tanto, que $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ está perfectamente determinada, ó bien, que se conoce la dirección en la cual tiene lugar la variación $\Delta\alpha$; se supone igualmente que $f(z, \alpha)$ y $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ son finitas en el contorno que se considera, y que este contorno de integración tiene una longitud también finita que designaremos por s. En estas hipótesis, si designamos por H el mayor valor del módulo de ε, se tendrá

$$\text{mód.} \int_{z_0}^{z_n} \varepsilon dz = \text{mód.} \int_0^s \varepsilon . \frac{dz}{ds} . ds \leq \int_0^s H . ds = Hs,$$

por ser $\left| \frac{dz}{ds} \right| = 1$; y como al tender $\Delta\alpha$ hacia cero, también H tiende hacia cero, la fórmula (3) en el límite toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{z_0}^{z_n} \frac{\partial f}{\partial \alpha} . dz,$$

como se quería demostrar.

Corolario VII.—Si $u = F(z)$ es una función monogena cuya derivada es $F'(z) = f(z)$ cuando z describe la curva $z_0 z_n$, vamos á demostrar que tomando la integral sobre esta línea, se tendrá

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z) dz = F(z_n) - F(z_0). \qquad (4)$$

En efecto, según lo que se acaba de demostrar, se tiene

$$\int_{u_0}^{u} du = \int_{z_0}^{z_n} F'(z) dz = \int_{z_0}^{n} f(z) dz;$$

mas si designamos por $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, puntos situados entre z_0 y z_n, y correspondientes á los valores $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$, de la variable, la primera integral es el límite hacia que tiende la suma

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0,$$

luego la fórmula (4) es exacta. Obsérvese que si la función $F(z)$ no es monodroma, existirá en la fórmula (4) una indeterminación que dependerá del camino que siga z para ir de z_0 á z_n.

Corolario VIII.—Si la función $f(z)$ se puede desarrollar en una serie absoluta y uniformemente convergente

$$f(z) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

cuyos términos sean funciones continuas, finitas y monogena de z, cuando esta variable recorre una línea de longitud l, se tendrá

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u_0 dz + \int_l u_1 dz + \ldots + \int_l u_n dz + \ldots \qquad (6)$$

En efecto, sea S_n la suma de las integrales de los n primeros términos de la serie y hagamos $\varphi(z) = u_n + u_{n+1} + \ldots$, se tiene

$$\int_l f(z)\,dz = S_n + \int_l \varphi(z)\,dz.$$

El módulo de $\varphi(z)$ es, por hipótesis, menor que α, siendo α un número positivo tan pequeño como se quiera, luego

$$\text{mód.} \int_l \varphi(z)\,dz \leqq \alpha l,$$

valor que tiende á cero á medida que n aumenta indefinidamente, por consiguiente, S_n tiende hacia $\int_l f(z)\,dz$, y la fórmula (9) es exacta.

46. Fórmula de Darboux.—Entre las diversas proposiciones estudiadas en la integración de las funciones reales que pueden extenderse á las integrales tomadas entre límites imaginarios, una de las más interesantes es la conocida con el nombre de *fórmula de la media*, contenida en la expresión

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = (x_n - x_0)\,f(\alpha),$$

en la cual se supone que x es una variable real, $f(x)$ una función continua y finita en el intervalo de x_0 á x_n, y α un valor de x contenido en este intervalo. El sabio profesor Mr. Darboux ha obtenido una fórmula análoga para las integrales de funciones complejas á lo largo de una cierta curva de longitud finita. Para obtenerla sea la integral

$$I=\int_{z_0}^{z_n} f(z)\,dz,$$

en la cual supondremos que $f(z)$ es una función finita, continua y monogena cuando z recorre una cierta curva $z_0 z_n$ de longitud S. La integral I puede transformarse en una integral tomada entre límites reales, haciendo

$$z=x+yi\left\{\begin{array}{l} x=\varphi_1(s) \\ y=\varphi_2(s) \end{array}\right\}, \qquad dz=\left(\frac{dx}{ds}+i\,\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

representando por s el arco de curva contado á partir del punto z_0. Sustituyendo, se tiene

$$I=\int_0^S f(z)\left(\frac{dx}{ds}+i\,\frac{dy}{ds}\right)ds.$$

El módulo de dz es $\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=1$, y teniendo en cuenta que el módulo de una suma no es mayor que la suma de los módulos de los sumandos, se deduce

$$|\,I\,| \leq \int_0^S |\,f(z)\,|\,.\,ds; \tag{6}$$

$|\,f(z)\,|$ es una cierta función de s que representaremos por $\psi(s)$; si designamos por σ el valor de s correspondiente á un cierto arco $z_0\alpha$, de manera que

$$|\,f(\alpha)\,|=\psi(\sigma),$$

se sabe, por lo antes recordado, que

$$\int_0^s \psi(s)ds = S.\psi(\sigma),$$

y, por consiguiente, en lugar de la expresión (6) se tendrá

$$|I| \leqq S.\psi(\sigma) = S\,|f(\alpha)|:$$

fórmula que puede escribirse bajo la forma

$$|I| = \varepsilon.S.\,|f(\alpha)|, \qquad (7)$$

suponiendo ε comprendido entre 0 y + 1. Sean ahora θ y ω los argumentos de I y de $f(\alpha)$, se tiene

$$f(\alpha) = |f(\alpha)|.e^{\omega i}, \quad \text{ó sea} \quad |f(\alpha)| = f(\alpha)e^{-\omega i},$$

y sustituyendo este valor en la expresión (7), después de multiplicada por $e^{\theta i}$, se obtiene

$$I = \int_{z_0}^{z_n} f(z)dz = \varepsilon e^{(\theta-\omega)i}.S.f(\alpha);$$

ahora bien, $\varepsilon e^{(\theta-\omega)i}$ es una cantidad, que designaremos por λ cuyo módulo está comprendido entre 0 y + 1, luego

$$\int_{z_0}^{z_n} f(z)dz = \lambda.S.f(\alpha),$$

que es la fórmula de Darboux. Hermite llamaba al factor λ, *el factor de Darboux*, y con este nombre se le sigue designando.

47. Teorema fundamental.—La proposición que sigue, debida á Cauchy, es la base y fundamento de toda la teoría que estamos estudiando.

Teorema.—*La integral* $\int_l f(z)dz$ *no cambia de valor si á la línea de integración se le hace experimentar una deformación continua, permaneciendo fijos sus extremos, siempre que esta*

línea al deformarse no atraviese ningún punto crítico de la función f(z).

Sean, en efecto, L y A (fig. 10) dos posiciones distintas del hilo de integración; marquemos sobre L una serie de puntos indefinidamente próximos $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$, y sobre A una serie de puntos correspondientes

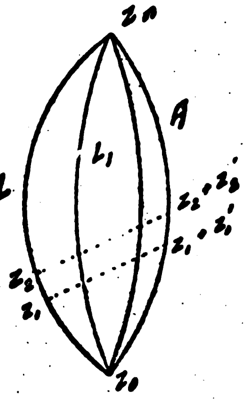


Fig. 10.

$$z_0, z_1 + z'_1, z_2 + z'_2, \ldots z_n;$$

unamos los puntos correspondientes por líneas rectas, y dividamos cada una de estas rectas en m partes iguales. Unamos, por último, los puntos de división que tengan igual número de orden, y obtendremos una serie de curvas L_1, L_2, ... intermedias entre L y A; á los diversos puntos $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ de la línea L corresponderán evidentemente sobre $L\mu$ los puntos que tienen por afijos z_0, $z_1 + \frac{\mu}{m} z'_1$, $z_2 + \frac{\mu}{m} z'_2, \ldots z_n$. Supongamos m indefinidamente grande, y hagamos $\frac{1}{m} = \varepsilon$.

Comparemos ahora las integrales tomadas á lo largo de dos líneas consecutivas, tales como L y L_1; por definición se tendrá

$$\int_L f(z)dz = lím. \Sigma f(z_h) \Delta z_h,$$

$$\int_{L_1} f(z)dz = lím. \Sigma f(z_h + \varepsilon z'_h) . \Delta(z_h + \varepsilon z'_h).$$

Por otra parte, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(z_h + \varepsilon z'_h) = \Delta z_h + \varepsilon . \Delta z'_h \\ f(z_h + \varepsilon z'_h) = f(z_h) + \varepsilon . z'_h f'(z_h) + \sigma \end{array}\right\},$$

siendo σ un infinitamente pequeño de orden superior al primero. Efectuando el producto de las expresiones anteriores, y deteniéndonos en los términos que sean infinitamente pequeños de orden superior al segundo, se tiene

$$f(z_h + \varepsilon z'_h).\Delta(z_h + \varepsilon z'_h) = f(z_h)\Delta z_h + \varepsilon f(z_h).\Delta z'_h + \varepsilon . z'_h . f'(z_h).\Delta z_h + \omega,$$

siendo ω un infinitamente pequeño de orden superior al segundo; por tanto, se tiene

$$\int_{L_1} f(z)dz - \int_L f(z)dz = lim.\Sigma\varepsilon[f(z_h).\Delta z'_h + z'_h f'(z_h).\Delta z_h] =$$

$$\int_L \varepsilon[f(z_h).dz'_h + z'_h.df z_h)] = \varepsilon\int_L d[z' f(z)] = \varepsilon[z'.f(z)]_{z_0}^{z_n}.$$

Ahora bien, z' se anula en los dos límites de la integración, puesto que los puntos z_0 y z_n están fijos, luego la diferencia $\int_{L_1} f(z)dz - \int_L f(z)dz$ es un infinitamente pequeño de orden superior al primero. Igual demostración se aplicaría á cada una de las diferencias $\int_{L_2} f(z)dz - \int_{L_1} f(z)dz$, ... luego la diferencia

$$\int_A - \int_L = \left(\int_{L_1} - \int_L\right) + \left(\int_{L_2} - \int_{L_1}\right) + \dots,$$

será una suma de infinitamente pequeños de orden superior al primero, y cuyo número es un infinitamente grande de primer orden solamente, por lo tanto, es menor que cualquier cantidad dada, y es, por consiguiente, rigurosamente nula.

Observación I.— Si la línea de integración al deformarse atraviesa un punto en cuyo dominio la función propuesta cesa de ser monodroma, la demostración precedente cae en defecto; pues en la expresión del elemento integral de

$$\int_{L_1} f(z)dz,$$

elemento que es $f(z_h + \varepsilon z'_h)$. $\Delta(z_h + \varepsilon z'_h)$, $f(z_h + \varepsilon z'_h)$ representa el valor de la función $f(z)$ en el punto $z_h + \varepsilon z'_h$ cuando la variable llega á este punto por la línea L_1, y la cantidad que le sustituye, $f(z_h) + \varepsilon z'_h . f'(z_h) + \sigma$, es el valor de la función cuando la variable z va de z_0 á z_h por la línea L, y después de z_h á $z_h + \varepsilon z'_h$ por la recta correspondiente, y esta sustitución no es posible si $f(z)$ cesa de ser monodroma.

Observación II.—La ecuación

$$f(z_h + \varepsilon z'_h) = f(z_h) + \varepsilon z'_h f'(z_h) + \sigma$$

en que nos hemos apoyado para la demostración del teorema, lleva consigo la hipótesis de que $f'(z_h)$ es finita y determinada para todos los puntos del área limitada por las curvas L y A; pues si la línea de integración en su traslación atraviesa un punto para el cual $f'(z)$ cesa de ser finita y determinada, la demostración no es exacta, ó al menos, no parece admisible. Vamos á demostrar, sin embargo, que el teorema subsiste también en este caso, con tal de que en esos puntos $f(z)$ siga siendo finita y monodroma. Sea, en efecto, a uno de estos puntos (fig. 11), el cual supondremos está aislado; envolvamos el punto a en un círculo de radio ρ infinitamente pequeño, y tracemos los cortes z_0h y z_nk. En virtud del teorema que acabamos de demostrar, se tendrá

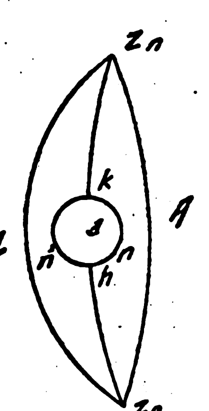


Fig. 11.

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_0hn'kz_n} = \int_{z_0h} + \int_{hn'k} + \int_{kz_n} \Bigg\}$$
$$\int_A f(z)dz = \int_{z_0hnkz_n} = \int_{z_0h} + \int_{hnk} + \int_{kz_n} \Bigg\},$$

y, por tanto,

$$\int_A - \int_L = \int_{hnk} - \int_{hn'k}.$$

Ahora bien, las dos integrales del segundo miembro de esta expresión tienen módulos infinitamente pequeños; pues si llamamos M al valor máximo de $|f(x)|$ para valores de z situados sobre la circunferencia, se tiene

$$\text{mód.} \int_{hnk} f(z)dz \gtrless \int_{hnk} | f(z)dz | \gtrless \int_{hnk} M . | dz | ;$$

pero si $z = x + yi$, $dz = dx + idy$, y, por tanto,

$$| dz | = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

designando por ds el elemento de arco de la línea de integración, por tanto,

$$\text{mód.} \int_{hnk} f(z)dz \gtrless Ms = M\pi\rho,$$

cantidad infinitamente pequeña; y como la misma demostración se aplica á la segunda integral, la diferencia $\int_A - \int_L$ será menor que cualquiera cantidad dada, y, por consiguiente, es en realidad nula.

Más adelante veremos que puntos críticos de la naturaleza del que acabamos de considerar no pueden existir.

Corolario I.—Si la función f(z) *es finita y monodroma en el interior y sobre el contorno de un área conexa, la integral* $\int f(z)dz$ *tomada á lo largo de este contorno, es cero.*

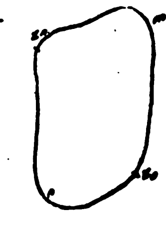


Fig. 12.

En efecto, señalemos sobre el contorno L del área dos puntos cualesquiera, z_0 y z_n (fig. 12): la aplicación de las proposiciones que preceden nos da

$$\int_L = \int_{z_0mz_n} + \int_{z_nnz_0} = \int_{z_0mz_n} - \int_{z_0nz_n} = 0,$$

puesto que las dos líneas $z_0 m z_n$ y $z_0 n z_n$ son reductibles una á otra por una deformación continua sin atravesar punto alguno para el cual $f(z)$ deje de ser finita y monodroma.

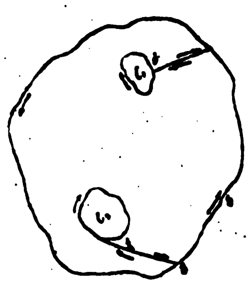


Fig. 13.

Corolario II.—Si C_1, C_2, ... *son contornos cerrados interiores á otro contorno* C *también cerrado* (figura 13), *y la función* f(z) *permanece finita y monodroma en el área conexa limitada por estos contornos, y también sobre el* C, *se tendrá*

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \ldots$$

tomando las integrales en el mismo sentido á lo largo de todos los contornos.

En efecto, unamos por medio de cortes simples cada uno de los contornos interiores C_1, C_2, ... al contorno exterior C. La integral de la función propuesta tomada siguiendo el contorno $abcdC_1dceafC_2fa$ en el sentido de las flechas será nula; ahora bien, esta integral puede descomponerse como sigue

$$\int_{abcdC_1dceafC_2fa} = \int_{abc} + \int_{cd} + \int_{C_1} + \int_{dc} + \int_{cea} + \int_{af} + \int_{C_2} + \int_{fa} = 0.$$

Pero se tiene

$$\int_{abc} + \int_{cea} = \int_C, \quad \int_{cd} = -\int_{dc}, \quad \int_{af} = -\int_{fa}$$

y además las dos integrales $\int_{C_1}$, $\int_{C_2}$ están tomadas recorriendo la variable estos contornos en sentido contrario al

que se ha tomado para recorrer el C; por tanto, invirtiendo en ellas el sentido del movimiento de la variable, para que éste sea el mismo en todas las integrales, $\int_{C_1}$ é $\int_{C_2}$ cambiarán de signo, y se tendrá, por consiguiente,

$$\int_C - \int_{C_1} - \int_{C_2} - \ldots = 0,$$

ó sea

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \ldots,$$

suponiendo descritos los contornos en el mismo sentido.

Corolario III.—Si en el interior de un área conexa de contorno C, *la función* f(z) *es finita y monodroma á excepción de puntos críticos aislados* a_1, a_2, ..., *se tendrá*

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \ldots,$$

designando por C_1, C_2, ... *círculos de radios finitos ó infinitamente pequeños que envuelvan los puntos críticos* a_1, a_2, ...

Porque envolviendo cada punto crítico en un círculo, la función $f(z)$ es finita y monodroma en el área conexa limitada por estos círculos, y el contorno C, y se la podrá aplicar el corolario anterior.

48. Teoremas de Riemann.—Los resultados obtenidos en el párrafo anterior pueden demostrarse de una manera algo diferente á la que hemos empleado, apoyándonos en dos teoremas de Riemann que vamos á exponer, y de los cuales se puede deducir el de Cauchy. La importancia de este punto en la teoría de funciones de variable compleja nos mueve á insistir en él aun á riesgo de pecar de pesadez y prolijidad.

Una recta indefinida que atraviese un área conexa corta á su contorno en un número par de puntos, tantos de entrada como de salida; supongamos esta recta paralela al eje de las x y recorrida en el sentido de las x crecientes. Si repre-

sentamos por $x_1, x_2, \ldots$, las abscisas de los puntos consecutivos $M_1, M_2, \ldots$ (fig. 14) de intersección de la recta con el contorno del área, las abscisas de índice *impar* corresponden á los puntos de entrada, y las de índice *par* á los de salida. Si un punto recorre el contorno del área C en un sentido tal que su proyección sobre el eje Oy marche en sentido de las y positivas, es decir, que pase de la parte inferior á la su-

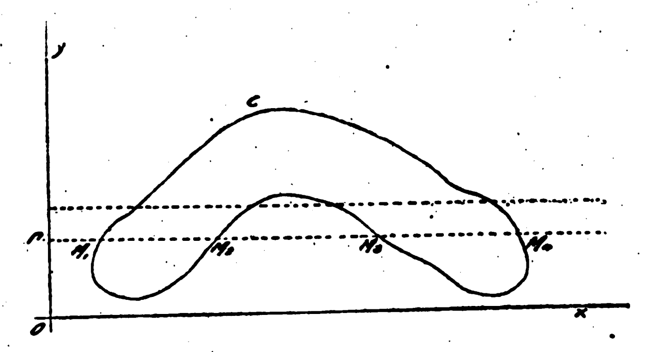


Fig. 14.

perior de la recta PM_4, el punto marchará con relación al área en sentido *directo* en los alrededores de cada punto de salida, y en sentido *retrógrado* en los alrededores de los de entrada. Hecha esta observación, podemos enunciar y demostrar los teoremas de Riemann.

Teorema I.—*Si* X *é* Y *son dos funciones reales de las variables reales* x *é* y, *la integral doble*

$$\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy,$$

tomada para todos los puntos de un área conexa C (fig. 14), *es igual á la integral*

$$\int (Xdy + Ydx),$$

tomada á lo largo del contorno de C, y describiendo este contorno en sentido directo.

En efecto, si integramos el término $\int\int \frac{\partial X}{\partial x} dxdy$ con relación á x, dejando á y constante, obtendremos por expresión de la integral indefinida $\int Xdy$. Sea OP el valor constante dado á y en la integración parcial efectuada con relación á x, y llamemos X_k el valor que toma X en un punto K del plano. El valor de la integral definida que nosotros buscamos es la suma de los elementos, tales como

$$\frac{\partial X}{\partial x} dxdy,$$

obtenidos haciendo variar x en el área C; por tanto, si la recta $y = OP$ encuentra al contorno C en los puntos consecutivos M_1, M_2, M_3, M_4, ..., la integral buscada se obtendrá haciendo variar x de PM_1 á PM_2, de PM_3 á PM_4, ...; de suerte que esta integral será

$$\int (... + X_{M_4} - X_{M_3} + X_{M_2} - X_{M_1}) dy,$$

ó más sencillamente,

$$\int Xdy,$$

conviniendo en hacer variar X sobre todo el contorno de C en el sentido directo, porque para calcular

$$\int (... + X_{M_2} - X_{M_1}) dy$$

será necesario hacer variar y desde el valor que tome sobre el punto más bajo hasta el que adquiere en el más alto del contorno de C, y entonces los puntos M_2, M_4 ... se mueven en sentido directo, y los M_1, M_3, ... en sentido retrógrado. Así que la integral $\int\int \frac{\partial X}{\partial x} dydx$ es igual á la

$\int Xdy$, tomada á lo largo del contorno de C en sentido directo.

De una manera análoga se ve que la integral

$$\int\int \frac{\partial Y}{\partial y} dxdy$$

extendida á todos los puntos del área C es igual á la

$$\int Ydx,$$

tomada á lo largo del contorno de C, pero tomada en sentido retrógrado, ó, á la $\int(-Ydx)$, tomada en sentido directo. Por consiguiente, se tendrá, si L representa la longitud del contorno de C,

$$\int\int_C \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy = \int_L (Xdy + Ydx),$$

como se quería demostrar.

Teorema II.—*Si* X *e* Y *son dos funciones reales de las variables reales* x *é* y, *la integral doble*

$$\int\int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy,$$

tomada para todos los puntos de un área conexa C, *es igual á la integral*

$$\int (Ydy - Xdx),$$

tomada á lo largo del contorno de C, *y describiendo este contorno en sentido directo.*

Como la demostración de este teorema es idéntica á la del anterior la omitimos.

Nota.—Obsérvese que los dos teoremas anteriores caen en defecto si en el interior del área C, ó sobre su contorno, las funciones X, Y, ó sus derivadas parciales, fuesen infini-

tas, discontinuas, ó no estuviesen bien determinadas, porque entonces las integraciones efectuadas carecen de sentido.

Corolario.—Si la expresión $Xdy + Ydx$ es una diferencial exacta, $\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, y entonces, en virtud del primero de los teoremas anteriores, se deduce que: *la integral tomada á lo largo del contorno de un área conexa* C *de una diferencial exacta, es nula,* ó, lo que es equivalente, *las integrales de una diferencial exacta, tomadas á lo largo de dos líneas que tienen los mismos extremos, son iguales,* siempre que entre esas dos líneas la diferencial en cuestión sea finita, continua y bien determinada, así como sus derivadas parciales. A el mismo resultado nos conduce el segundo teorema si se supone que $Ydy - Xdx$ es una diferencial exacta.

Teorema de Cauchy.—Los teoremas de Riemann conducen de la siguiente manera muy sencilla al de Cauchy, demostrado en el párrafo precedente. Si las funciones reales X é Y de las variables x, y permanecen finitas, continuas y bien determinadas en el interior de un área conexa C de contorno L, así como sus derivadas parciales, se tiene

$$\int\int_C \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dxdy = \int_L (Xdy + Ydx), \qquad (1)$$

$$\int\int_C \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dxdy = \int_L (Ydy - Xdx). \qquad (2)$$

Supongamos ahora que $f(x) = X + Yi$ sea una función holomorfa de $z = x + yi$ en el interior, y sobre el contorno del área conexa C, se tiene

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}. \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

las fórmulas (1) y (2) se reducen á

$$\left. \begin{array}{l} \int_L (Xdy + Ydx) = 0 \\ \int_L (Xdx - Ydy) = 0 \end{array} \right\} ;$$

si sumamos estas dos ecuaciones, después de multiplicar la primera por i, se tiene

$$\int_L (Xidy + Yidx + Xdx - Ydy) = \int_L (X + Yi)(dx + idy) = \int_L f(z)dz = 0,$$

y, por tanto, *la integral de la función* f(z) dz, *tomada á lo largo del contorno* L *del área conexa* C, *en cuyo interior* f(z) *es holomorfa, es nula.*

Resulta de aquí *que si entre dos líneas* $z_0 z z_n$ *y* $z_0 z' z_n$, *terminadas en los mismos extremos, y limitando un área conexa, no hay punto crítico alguno de la función* f(z), *las integrales de* f(z)dz, *tomadas entre los límites* z_0 *y* z_n *á lo largo de las dos líneas, son iguales.*

Teorema general.—*El valor de la integral* $\int_{z_0}^{n} f(z)dz$ *no cambia si se deforma el contorno de integración de una manera continua, pero arbitraria, siempre que al deformarse no se le haga atravesar punto alguno para el cual* f(z) *cese de ser holomorfa, y que se conserven los mismos puntos extremos de la línea de integración.*

En efecto, consideremos una línea de integración A de extremos z_0 y z_n, y otra B, obtenida por deformación de la A con las condiciones señaladas en el enunciado. Si las líneas A y B forman un contorno simple, ó sea, si limitan un área conexa, el teorema está demostrado, y si se cortan en algún punto z', por ejemplo, además de los z_0 y z_n, se observará que las integrales de z_0 á z' y de z' á z_n serán iguales, y, por tanto, también las de z_0 á z_n, como se quería demostrar.

CAPÍTULO VII

Teoría de los residuos.

49. Primeras nociones.—Si $f(z)$ es una función monodroma y monogena, que se hace infinita para el valor $z = a$, se llama *residuo* de la función $f(z)$, para $z = a$ el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz,$$

tomada á lo largo de una circunferencia de radio infinitamente pequeño, descrita desde el punto a como centro, y recorrida en sentido directo. Y se llama *residuo integral* de una función con relación á un área simplemente conexa, la suma de los residuos de esta función relativos á todos los infinitos de ella situados en el interior del área. Según ya sabemos (n.° 47, cor. III) esta suma es igual á la integral de la función tomada á lo largo del contorno del área, recorrido en sentido directo, dividida por $2\pi i$.

Cauchy empleaba la notación siguiente para designar el residuo de una función respecto al punto a,

$$\mathcal{E}_a[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_a f(z)dz,$$

pero nosotros emplearemos con preferencia las notaciones

$$R_a[f(z)], \quad \text{ó} \quad R_a f(z),$$

que son de más fácil escritura. Si la función de la cual se

quiere hallar el residuo integral es un producto de la forma $f(z).\varphi(z)$, y el residuo se toma con relación á un área A que no contiene infinitos más que de la función $f(z)$, se emplea la notación

$$R_A[f(z)].\varphi(z).$$

50. Determinación del residuo de una función.—Los teoremas que siguen nos dan medios de determinar el residuo de una función en los casos de más frecuente aplicación, así como nos hacen conocer algunas propiedades de que hemos de hacer frecuente uso.

TEOREMA I.—*Si la funcion* f(z) *se hace infinita para el valor* z = a, *y puede presentarse bajo la forma*

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

en la cual $\varphi(z)$ *representa una función para la cual* z = a *es un punto ordinario, y* $\psi(z)$ *una serie finita, ó de infinitos términos, pero uniformemente convergente, y de la forma*

$$\psi(z) = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(z-a)^n} + \dots;$$

en la que $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ *son coeficientes constantes, vamos á demostrar que*

$$R_a[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_a f(z)dz = A_1.$$

En efecto, de las hipótesis hechas se deduce

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(z-a)^n} + \dots,$$

multiplicando esta expresión por dz é integrando á lo largo de una circunferencia que envuelva al punto crítico a, se tendrá

$$\int_a f(z)dz = \int_a \varphi(z)dz + \int_a \frac{A_1 dz}{z-a} + \dots + \int_a \frac{A_n dz}{(z-a)^n} + \dots$$

La integral $\int_a \varphi(z)dz$ es cero por ser a un punto ordinario de la función $\varphi(z)$. Las integrales de la forma $\int_a \frac{A_n dz}{(z-a)^n}$ se obtienen, para todos los valores de n, excepto para $n=1$, como sigue

$$\int_a \frac{A_n dz}{(z-a)^n} = A_n \int_a (z-a)^{-n} dz = A_n \left[\frac{(z-a)^{-n+1}}{-n+1} \right]_a = \frac{A_n}{-n+1} \left[\frac{1}{(z-a)^{n-1}} \right]_a = 0,$$

por ser idénticos los valores de z correspondientes á los extremos de la línea de integración. Para calcular la integral

$$\int_a \frac{A_1 dz}{z-a}$$

hagamos

$$z - a = \rho e^{\theta i}, \quad \text{de donde} \quad dz = \rho i e^{\theta i} d\theta,$$

y, por tanto,

$$\int_a \frac{A_1 dz}{z-a} = \int_a \frac{A_1 \rho e^{\theta i} i d\theta}{\rho e^{\theta i}} = \int_0^{2\pi} A_1 i d\theta = 2\pi i A_1;$$

por consiguiente, se tiene finalmente

$$\int_a f(z)dz = 2\pi i A_1, \quad \text{ó sea} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_a f(z)dz = A_1,$$

como se quería demostrar.

Teorema II.—*Si* f(z) *es una función monodroma y monogena que no es cero ni infinito para* z = a, *el residuo de la función* $\frac{f(z)}{z-a}$ *para este punto, es* f(a).

En efecto, según la definición, se tiene

$$R_a\left[\frac{f(z)}{z-a}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{z-a},$$

tomando la integral á lo largo de una circunferencia de radio infinitamente pequeño ρ y descrita desde a como centro. El afijo de un punto de esta circunferencia es

$$z=a+\rho e^{\theta i},$$

y, por consiguiente, se tendrá

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{z-a}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{\theta i}).\rho i e^{\theta i}d\theta}{\rho e^{\theta i}}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^{\pi} f(a+\rho e^{\theta i})d\theta;$$

ahora bien, como $f(z)$ es una función continua, se tendrá

$$f(a+\rho e^{\theta i})=f(a)+\alpha,$$

siendo α un infinitamente pequeño que se anula al mismo tiempo que ρ, luego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{z-a}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha.d\theta;$$

si designamos por A el valor máximo del módulo de α, se deduce

$$\text{mód.}\int_0^{2\pi}\alpha d\theta \leq A.2\pi,$$

cantidad que tiende hacia cero al mismo tiempo que ρ, y nos queda por último

$$R_a\left[\frac{f(z)}{z-a}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)d\theta=f(a),$$

como se quería demostrar.

TEOREMA III.—*Si una función es holomorfa en un área conexa, su derivada es también holomorfa en la misma área.*

En efecto, sea la función $f(z)$, que supondremos holomorfa en el interior de un área conexa; consideremos una porción de esta área que esté limitada por un contorno simple L, y supongamos que a es un punto interior á este contorno; según el teorema anterior se tendrá

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a)^{-1}\,dz = f(a),$$

tomando la integral á lo largo del contorno L. Para un segundo punto $a+\Delta a$, próximo al primero é interior al contorno L, se tiene del mismo modo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a-\Delta a)^{-1}\,dz = f(a+\Delta a).$$

De estas expresiones se deduce

$$f(a+\Delta a)-f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)[(z-a-\Delta a)^{-1}-(z-a)^{-1}]dz,$$

ó sea

$$\Delta . f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z) . \Delta(z-a)^{-1}\,dz,$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta a} = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\,\frac{\Delta(z-a)^{-1}}{\Delta a}\,dz .$$

Como la función $(z-a)^{-1}$ de la variable a tiene por derivada $(z-a)^{-2}$ se podrá hacer

$$\frac{\Delta(z-a)^{-1}}{\Delta a} = (z-a)^{-2}+\varepsilon,$$

siendo ε un infinitamente pequeño que tiende hacia cero al

mismo tiempo que Δa, luego la expresión precedente tomará la forma

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta a} = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a)^{-2}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z).\varepsilon dz.$$

Razonando como en el teorema anterior se prueba que

$$\text{lím.} \int_L f(z).\varepsilon dz = 0,$$

luego

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z).(z-a)^{-2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz.$$

Repitiendo para esta nueva función el razonamiento anterior, se obtendrá

$$f'(a+\Delta a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a-\Delta a)^{-2}dz,$$

y, por tanto,

$$f'(a+\Delta a) - f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z).\Delta(z-a)^{-2}dz.$$

La función $(z-a)^{-2}$ es continua, y, por consiguiente, se puede tomar Δa suficientemente pequeño para que el módulo de $\Delta(z-a)^{-2}$ sea menor que una cantidad dada cuando z describe el contorno L: el valor de la integral definida precedente es infinitamente pequeño, y, por tanto, $f'(a)$ es una función continua. Además, se tiene

$$\frac{\Delta f'(a)}{\Delta a} = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\frac{\Delta(z-a)^{-2}}{\Delta a}dz,$$

y como la derivada de $(z-a)^{-2}$ con relación á a es

$$2(z-a)^{-3},$$

se hará

$$\frac{\Delta(z-a)^{-2}}{\Delta a} = 2(z-a)^{-3} + \varepsilon,$$

siendo $lim. \varepsilon = 0$ para $lim. \Delta a = 0$, y pudiéndose escribir

$$\frac{\Delta f'(a)}{\Delta a} = \frac{1.2}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a)^{-3}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\varepsilon dz,$$

como $lim. \int_L f(z)\varepsilon dz = 0$, se tendrá finalmente

$$f''(a) = \frac{1.2}{2\pi i}\int_L f(z)(z-a)^{-3}dz = \frac{1.2}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}.$$

Y como este razonamiento puede repetirse ilimitadamente, resulta que:

Corolario.—Si una función es holomorfa en el interior de un área conexa, admite una infinidad de derivadas sucesivas que son todas holomorfas en la misma área.

TEOREMA IV.—*Si* f(z) *es una función monodroma y monogena que no es cero ni infinito para* z = a, *y* m *es un número entero y positivo distinto de la unidad, el residuo de la función*

$$\frac{f(z)}{(z-a)^m}$$

para z = a *está dado por la fórmula*

$$R_a \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}f(z)}{da^{m-1}},$$

En efecto, diferenciando $m-1$ veces con relación á a, la fórmula

$$R_a \frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a),$$

se obtiene

$$R_a \frac{f(z)}{(z-a)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} = \frac{d.f(a)}{da},$$

$$1.2.R_a \frac{f(z)}{(z-a)^3} = \frac{1.2}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{(z-a)^3} = \frac{d^2f(a)}{da^2},$$

....

$$(m-1)!\,R_a \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{(z-a)^m} = \frac{d^{m-1}f(a)}{da^{m-1}};$$

de donde se deduce, como se quería probar,

$$R_a \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{d^{m-1}f(a)}{da^{m-1}}.$$

TEOREMA V.—*Si* f(z) *es una función tal que*

$$\text{lím.}\ |(z-a).f(z)| = 0,$$

para $z = a$, *la integral de* f(z)dz, *tomada á lo largo de una circunferencia de radio infinitamente pequeño y de centro* a, *tiende hacia cero al mismo tiempo que el radio de la circunferencia.*

En efecto, sea M el valor máximo del módulo de $(z-a)f(z)$ sobre esta circunferencia; haciendo $|z-a| = r$, se tendrá

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r},$$

y, por consiguiente,

$$\text{mód.}\int_a f(z)dz \leq \int_a \frac{M}{r}\,ds \leq 2\pi M,$$

y como para $z = a$, $lím. M = 0$, resulta

$$\text{lím. mód.}\int_a f(z)dz = 0,$$

como se quería demostrar.

TEOREMA VI.—*Si* f(z) *es una función tal que* | zf(z) | = 0, *para* z = ∞, *la integral de* f(z)dz, *tomada á lo largo de un contorno circular de radio infinito será nula, y se tendrá*

$$R_a . f(z) = 0.$$

En efecto, se tiene

$$R_a . f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a f(z)dz;$$

haciendo $z = re^{\theta i}$, de donde $dz = rie^{\theta i}d\theta = zid\theta$, y, por consiguiente,

$$Ra f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} zi f(z) d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z f(z) d\theta < | z f(z) | = 0,$$

puesto que para | z | = ∞, | zf(z) | = 0.

TEOREMA VII.—*Si* | zf(z) | = 0 *para* | z | = ∞, *y estando el argumento de* z *comprendido entre* θ_0 *y* θ_1, *la integral de* f(z)dz *tomada á lo largo de un arco de circunferencia de radio infinito y cuyos extremos tienen radios polares que forman ángulos* θ_0 *y* θ_1, *es nula.*

En efecto, la integral buscada tiene por valor

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(re^{\theta i}) rie^{\theta i} d\theta = i\int_{\theta_0}^{\theta_1} z f(z) d\theta \leq i \, | z f(z) | \, (\theta_1 - \theta_0) = 0,$$

por ser | zf(z) | = 0 para z = ∞.

TEOREMA VIII.—*La diferencia de las integrales de* f(z), *tomadas entre los mismos límites, pero tomadas á lo largo de dos caminos que no se corten* $z_0z'z_n$ *y* $z_0z''z_n$ (fig. 12, pág. 111), *es igual al residuo* R[f(z)] *relativo al contorno cerrado* $z_0z'z_nz''z_0$, *multiplicado por* $2\pi i$.

En efecto, según sabemos (n.° 47, cor. III), se tiene

$$\int_{z_0z'z_nz''z_0} = \int_{z_0z'z_n} + \int_{z_nz''z_0} = 2\pi i . R[f(z)],$$

ó sea,

$$\int_{z_0 z' z_n} - \int_{z_0 z'' z_n} = 2\pi i . R[f(z)].$$

51. Aplicación del cálculo de residuos á la evaluación de integrales definidas.—Aunque las funciones algébricas que se presentan bajo la forma de fracciones racionales se saben integrar por procedimientos elementales, vamos á aplicar el cálculo de residuos á la evaluación de integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx, \qquad (1)$$

en la cual $\varphi(x)$ es un polinomio de grado inferior en dos unidades al grado de $\psi(x)$. La integral (1) está tomada á lo largo de todo el eje de las x, y puede sustituirse por la integral de la misma función tomada á lo largo de una semicircunferencia de radio infinito descrita desde el origen como centro y situada sobre el eje de las x, aumentada en la suma de los residuos de la fracción $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ relativos á los infinitos de esta función, situados encima del referido eje, multiplicada por $2\pi i$. Ahora bien, como $z\varphi(z)$ es de grado inferior á $\psi(z)$, el módulo de

$$\frac{z\varphi(z)}{\psi(z)}$$

es cero para $z = \infty$, luego la integral á lo largo de la semicircunferencia es nula, y, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = 2\pi i \Sigma R \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Ejemplos.—I. Como primer ejemplo tratemos de evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx,$$

en la cual se supone que m y n son números enteros y $m < n$; como nos encontramos en el caso referido en el párrafo anterior, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\, dx = 2\pi i \Sigma R \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}},$$

tomando cada residuo con relación á una de las raíces de la ecuación $1 + z^{2n} = 0$, situadas sobre el eje de las x. Ahora bien, las raíces de la ecuación anterior están dadas por la fórmula

$$z = \cos. \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i.\text{sen.} \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots n-1, n, \ldots 2n-1$; y si hacemos

$$\alpha = \cos. \frac{\pi}{2n} + i.\text{sen.} \frac{\pi}{2n},$$

las raíces de esa ecuación que están sobre el eje de las x son, evidentemente,

$$\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \ldots \alpha^{2n-1},$$

que son aquellas que tienen argumentos menores que π. Para hallar el residuo de $\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}$, correspondiente á la raíz $a = \alpha^{2k+1}$, hagamos

$$\frac{f(z)}{z-a} = \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}},$$

de donde

$$f(z) = z^{2m} \frac{z-a}{1+z^{2n}} = z^{2m} \frac{z-\alpha^{2k+1}}{1+z^{2n}};$$

evidentemente la función $f(z)$ no es nula ni infinita para $z = \alpha^{2k+1}$, pues la fracción de su segundo miembro puede simplificarse dividiendo sus dos términos por $z - \alpha^{2k+1}$,

por consiguiente, podremos aplicarle la fórmula

$$R_a \frac{f(z)}{z - a} = f(a)$$

que aquí se convierte en

$$R_a \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}} = f(\alpha^{2k+1}) = \alpha^{(2k+1)m} \cdot \frac{\alpha^{2k+1} - \alpha^{2k+1}}{1 + \alpha^{(2k+1)2n}},$$

y como esta expresión se presenta bajo la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ habrá que determinar su verdadero valor. Para ello hallemos el límite de la expresión

$$\frac{z - \alpha^{2k+1}}{1 + z^{2n}} \qquad \text{para} \qquad z = \alpha^{2k+1}.$$

Sustituyendo en la fracción anterior á la relación de funciones la de sus respectivas derivadas, y hallando límites, se obtiene

$$\text{lím.} \frac{z - \alpha^{2k+1}}{1 + z^{2n}} = \text{lím.} \frac{1}{2nz^{2n-1}} = \frac{1}{2n(\alpha^{2k+1})^{2n-1}} = \frac{\alpha^{2k+1}}{2n \cdot \alpha^{(2k+1)2n}},$$

y, por consiguiente, se obtendrá para el residuo buscado

$$R_a \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}} = \alpha^{(2k+1)2m} \cdot \frac{\alpha^{2k+1}}{2n \cdot \alpha^{(2k+1)2n}} = \frac{\alpha^{(2k+1)(2m+1)}}{3n(\alpha^{2n})^{2k+1}},$$

y por ser $\alpha^{2n} = -1$, se tiene finalmente

$$R_a \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}} = -\frac{1}{2n} \cdot \alpha^{(2k+1)(2m+1)}.$$

Por consiguiente, para la integral buscada, se obtendrá la

expresión

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = -\frac{2\pi i}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \cdot \alpha^{(2k+1)(2m+1)} =$$

$$-\frac{2\pi i}{2n}\left[\alpha^{2m+1} + \alpha^{3(2m+1)} + \ldots + \alpha^{(2n-1)(2m+1)}\right],$$

y como la expresión contenida dentro del paréntesis es la suma de términos de una progresión geométrica de razón $\alpha^{2(2m+1)}$, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = -\frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{\alpha^{2m+1} - \alpha^{(2n-1)(2m+1)} \cdot \alpha^{2(2m+1)}}{1-\alpha^{(2m+1)}} =$$

$$\frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{\alpha^{2m+1} - \alpha^{2n(2m+1)} \cdot \alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1)} - 1} = \frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{2\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1)} - 1}.$$

Sustituyendo ahora α por su valor, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx =$$

$$\frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{2\left[\cos. \frac{(2m+1)\pi}{2n} + i \cdot \text{sen.} \frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]}{\left[\cos. 2 . \frac{(2m+1)\pi}{2n} + i . \text{sen.} 2 . \frac{(2m+1)\pi}{2n}\right] - 1};$$

haciendo $\frac{(2m+1)\pi}{2n} = \beta$, para abreviar en la escritura, la fórmula anterior nos da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{2[\cos.\beta + i.\text{sen.}\beta]}{\cos.^2\beta - \text{sen.}^2\beta - 1 + 2i\text{sen.}\beta.\cos.\beta} =$$

$$\frac{2\pi i}{2n} \cdot \frac{\cos.\beta + i.\text{sen.}\beta}{i.\text{sen.}\beta(\cos.\beta + i.\text{sen.}\beta)} = \frac{2\pi}{2n\text{sen.}\beta} = \frac{\pi}{n.\text{sen.} \frac{(2m+1)\pi}{2n}}. \quad (1)$$

De esta fórmula se deduce otra de frecuente aplicación: hagamos

$$x^{2n}=z,\quad \frac{2m+1}{2n}=a,\quad \text{y, por tanto,}\quad x=z^{\frac{1}{2n}},\quad x^{2m}=z^{\frac{2m}{2n}},$$

$$2nx^{2n-1}dx=dz,\quad dx=\frac{dz}{2nx^{2n-1}}=\frac{xdz}{2nx^{2n}}=\frac{z^{\frac{1}{2n}}dz}{2nz},$$

sustituyendo en la (1) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=2\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=$$

$$2\int_0^{\infty}\frac{z^{\frac{2m}{2n}}}{1+z}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2n}}dz}{2nz}=\int_0^{\infty}\frac{z^{\frac{2m}{2n}+\frac{1}{2n}-1}}{n(1+z)}dz=$$

$$\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}}{1+z}dz=\frac{\pi}{n.\text{sen}.a\pi},$$

de donde

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}}{1+z}dz=\frac{\pi}{\text{sen}.a\pi}.$$

II. La función $e^{-z^2}=\frac{1}{e^{z^2}}$ es holomorfa en toda la extensión del plano, luego la integral $\int e^{-z^2}dz$, relativa á un contorno cerrado cualquiera, es nula. Consideremos el rectángulo $ABCD$ (fig. 16), formado por el eje de las x, una paralela á este eje trazada á la distancia $OE=a$, y dos paralelas al eje de las y, BC y AD trazadas á las distancias $+p$ y $-p$, que pueden crecer ilimitadamente. Si la variable sigue la línea AB, se tiene $z=x$, y variará de $x=-p$ á $x=+p$ (y p crece indefinidamente); al seguir la variable la línea BC, se tiene $z=p+it$, designando por t una nueva variable real

que varía de 0 á a; al seguir z la línea CD, se tiene $z = t + ai$, variando t de $+\infty$ á $-\infty$; y, por último, si z sigue la línea DA, se tendrá $z = -p + it$, variando t de a á 0. Como la integral relativa al contorno es nula, se tiene

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0, \qquad (1)$$

y vamos ahora á calcular por separado cada una de estas

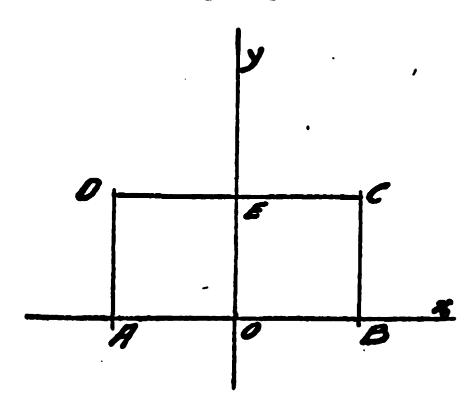


Fig. 15.

integrales. Por los elementos de Cálculo integral se sabe que

$$\int_{AB} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Para hallar la segunda integral hemos dicho que $z = p + it$, y t una variable real que varía de 0 á a, y como $dz = idt$, se deduce

$$\int_{BC} e^{-z^2} dz = \int_0^a e^{-(p+it)^2}.idt = e^{-p^2}\int_0^a e^{-2pit}.e^{t^2}.idt =$$
$$e^{-p^2}\int_0^a e^{t^2}\,idt(\cos.2pt - i.\text{sen}.2pt),$$

y de aquí se deduce

$$\text{mód.}\left|\int_{BC} e^{-z^2}dz\right| \leq e^{-p^2}\int_0^a e^{a^2}dt = \frac{ae^{a^2}}{e^{p^2}},$$

cantidad que tiende hacia cero al mismo tiempo que p crece indefinidamente. Del mismo modo se vería que el módulo de la cuarta integral $\int_{DA} e^{-z^2}dz$ tiende hacia cero al crecer p.

Y respecto á la integral $\int_{CD} e^{-z^2}dz$, haciendo $z = t + ai$, y variando t de $+\infty$ á $-\infty$, se obtendrá, por ser $dz = dt$,

$$\int_{CD} e^{-z^2}dz = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-(ai+t)^2}dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a^2}e^{-2ati-t^2}dt =$$

$$-e^{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(\cos.2at - i\,\text{sen}.2at)dt,$$

y en virtud de igualdad (1) se tendrá

$$e^{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(\cos.2at - i.\text{sen}.2at)dt = \sqrt{\pi}$$

y separando partes reales é imaginarias

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}.\cos.2at.dt &= e^{-a^2}\sqrt{\pi}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}.\text{sen}.2at.dt &= 0\end{aligned}\right\},$$

fórmulas que son de alguna utilidad.

CAPÍTULO VIII

Series de Cauchy y Laurent.

52. Fórmula importante.—En el capítulo precedente (n.º 50, teor. IV) se ha obtenido la expresión

$$R_a \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

en la cual se supone que $f(z)$ es una función holomorfa en el interior del círculo descrito desde a como centro y con radio infinitamente pequeño. Si suponemos que en el interior de un área conexa la función $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ no tiene más punto crítico que el $z = a$, es evidente que la función $f(z)$ será también holomorfa en el interior de esa área; en esta hipótesis designemos por r la mínima distancia del punto a al contorno del área, para todo punto de este contorno se tendrá

$$|z-a| \geq r.$$

Representando por M el valor máximo del módulo de $f(z)$ sobre el contorno, y por L la longitud de éste, se tendrá

$$\text{mód.}\int_a \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \overline{\gtrless} \int_a \frac{M}{r^{n+1}}\, ds \overline{\gtrless} \frac{ML}{r^{n+1}},$$

y, por lo tanto,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{ML}{r^{n+1}};$$

si el área considerada es un círculo de radio r, como $L = 2\pi r$, la fórmula anterior se convierte en

$$|f^{(n)}(a)| \leqq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M2\pi r}{r^{n+1}} = \frac{M.n!}{r^n},$$

fórmula muy importante que inmediatamente utilizaremos.

53. Teorema de Cauchy ó serie de Taylor generalizada.—*Si* f(z) *es una función finita, continua, monodroma y monogena en el interior de un círculo, y sobre la circunferencia, que tiene su centro en un punto* a, *y* z_1 *es un punto situado en el interior de este círculo, vamos á demostrar que* $f(z_1)$ *puede desarrollarse en la serie absoluta y uniformemente convergente*

$$f(z_1) = f(a) + (z_1 - a)f'(a) + \frac{(z_1 - a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(z_1 - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (1)$$

En efecto, sea z el afijo de un punto situado sobre la circunferencia trazada desde el punto a como centro; de las hipótesis hechas se deduce

$$|z - a| > |z_1 - a|.$$

Ahora, de la identidad

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{(z - a) - (z_1 - a)},$$

se deduce la expresión

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - a} + \frac{z_1 - a}{(z - a)^2} + \dots + \frac{(z_1 - a)^n}{(z - a)^{n+1}} +$$

$$\frac{(z_1 - a)^{n+1}}{(z - a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{z - z_1},$$

y de aquí, suponiendo que se integra á lo largo de la circunferencia de centro a, se deduce la serie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{z - z_1} = f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{z - a} +$$

$$\frac{(z_1 - a)}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{(z - a)^2} + \dots + \frac{(z_1 - a)^n}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{(z - a)^{n+1}} +$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a \left(\frac{z_1 - a}{z - a}\right)^{n+1} \cdot \frac{f(z)dz}{z - z_1};$$

ó, lo que es igual, por ser

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)dz}{(z - a)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

$$f(z_1) = f(a) + (z_1 - a) f'(a) + \frac{(z_1 - a)^2}{2!} f''(a) + \dots +$$

$$\frac{(z_1 - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R,$$

haciendo

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_a \left(\frac{z_1 - a}{z - a}\right)^{n+1} \frac{f(z)dz}{z - z_1}.$$

Vamos á demostrar que el módulo de R tiende hacia cero cuando n crece indefinidamente: en efecto, sea M el valor máximo del módulo de $f(z)$ para valores de z situados sobre

la circunferencia, ó en su interior, y hagamos

$|z_1 - a| = \rho,\quad |z - a| = r,$ y, por tanto, $|z - z_1| \gtreqless r - \rho,$

se tendrá

$$|R| \lesseqgtr \frac{\rho^{n+1}}{2\pi}\int_a \frac{Mds}{r^{n+1}(r-\rho)} = \frac{Mr}{r-\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1},$$

cantidad que tiene por límite cero cuando n crece ilimitadamente por ser $\frac{\rho}{r} < 1$, y ser finito el factor $\frac{Mr}{r-\rho}$. Luego la serie (1) se verifica, y es absoluta y uniformemente convergente para todo valor de z contenido en el círculo considerado.

Nota.—Utilizando la fórmula de Darboux, anteriormente expuesta (núm. 46), al término R podría dársele la forma

$$|R| = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{f(\alpha)}{\alpha - z_1}\cdot\left(\frac{z_1 - a}{\alpha - a}\right)^{n+1}\cdot S = \lambda r\,\frac{f(\alpha)}{r-\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1},$$

siendo α un punto del contorno.

Consecuencia.—La serie (1) nos demuestra que: *para que una función* f(z) *sea desarrollable en serie ordenada, según las potencias enteras y positivas de la diferencia* (z — a), *es suficiente que el punto* z *esté en el interior de un círculo descrito desde el punto* a *como centro y con un radio tal que la función* f(z) *sea finita, continua, monodroma y monogena en todo punto interior á este círculo:* ó dicho en otros términos, *que será suficiente que el módulo de* z — a *sea menor que la distancia del punto* a *al punto más próximo á él, para el cual la función cese de ser finita, continua, monodroma y monogena.*

Observación.—Observemos ahora que si una función es desarrollable en una serie de la forma (1) en el interior de un círculo de centro a, el desarrollo tiene que coincidir con el obtenido por la fórmula de Taylor. En efecto, si las dos series ordenadas por las potencias ascendentes de $z - a$ representan una misma función, en el interior del círculo considerado, su diferencia, que será también una serie de la

forma

$$k_0 + k_1(z-a) + k_2(z-a)^2 \ldots + k_n(z-a)^n + \ldots,$$

debe ser idénticamente nula para todo valor de z situado en el interior del área considerada. Supongamos que k_m sea el primer coeficiente que no es cero en la diferencia anterior, esta diferencia tomará la forma

$$(z-a)^m \left[k_m + k_{m+1}(z-a) + \ldots\right];$$

el primer factor $(z-a)^m$ se anula únicamente para $z=a$, luego la serie

$$k_m + k_{m+1}(z-a) + \ldots$$

debe anularse para cualquier valor de z contenido en el área, excepto para $z=a$, y, á causa de la continuidad de la función que define, también para $z=a$, lo que exige que $k_m=0$, contra la hipótesis; por consiguiente, todos los coeficientes k tienen que ser cero, y las dos series coinciden por completo.

Notaciones.—El círculo descrito desde a como centro y que pasa por el punto crítico de $f(z)$ más próximo á a, recibe el nombre de *círculo de convergencia* de la serie; y una función á la cual se le puede aplicar el desarrollo (1) en el dominio de un punto a, se dice que es una *función regular* en ese punto.

Las series de la forma (1) suelen anotarse con los símbolos

$$P(z-a), \qquad P(z \mid a),$$

y de una manera análoga, las series semejantes, pero ordenadas con relación á las potencias enteras y negativas de $z-a$, se anotan con el símbolo

$$P\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Si el círculo de convergencia de la serie tiene el radio infinitamente grande, ó lo que es igual, si $f(z)$ es una función

holomorfa en toda región finita del plano, las series correspondientes se anotan con los símbolos

$$G(z-a), \qquad G\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

según estén ordenadas con relación á las potencias enteras positivas ó negativas de $z-a$.

54. Serie de Mac-Laurin.—Si en la fórmula (1) se hace $a=0$ y $z_1=z$, se obtiene la fórmula siguiente, que contiene á la de Mac-Laurin si se supone real la variable

$$f(z)=f(0)+zf'(0)+\frac{z^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots \quad (2)$$

El círculo de convergencia de esta serie tiene por centro el origen, y su radio es el módulo de la menor raíz de la ecuación $f(z)=\infty$, suponiendo siempre que $f(z)$ sea monodroma y monogena en el interior de este círculo.

Las notaciones indicadas en el párrafo anterior toman aquí las formas

$$P(z), \qquad P\left(\frac{1}{z}\right), \qquad G(z), \qquad G\left(\frac{1}{z}\right).$$

55. Condición para que una función sea desarrollable en serie.—El teorema de Cauchy da inmediatamente la condición para que una función de variable real $f(x)$ sea desarrollable en serie absoluta y uniformemente convergente ordenada por las potencias enteras y positivas de $\left\{\frac{x-a}{x}\right\}$, así como el valor máximo de esta cantidad para el cual es posible el desarrollo. Se reemplaza la variable real x por $\left\{\frac{a+z}{z}\right\}$, siendo z una variable compleja, y se busca la raíz de módulo más pequeño de la ecuación $\left\{\begin{matrix} f(a+z)=\infty \\ f(z)=\infty \end{matrix}\right\}$ y el módulo de esta raíz será el límite superior del valor numérico de $\left\{\frac{x-a}{x}\right\}$ para el cual es posible el desarrollo.

Por ejemplo, si se desea el desarrollo de la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

ordenado con relación á las potencias de x, se hará

$$\frac{z}{e^z - 1} = \infty, \qquad \text{ó sea} \qquad \frac{e^z - 1}{z} = 0;$$

y como la raíz de menor módulo de esta ecuación es $z = 2\pi i$, 2π es el radio del círculo de convergencia para el desarrollo de la función en serie.

56. Aplicaciones.—*I. Desarrollo en serie de* $(1+z)^m$. Si z es una cantidad real, y de valor absoluto menor que la unidad, se sabe que la serie

$$(1+z)^m = 1 + \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 + \ldots + \binom{m}{n} z^n + \ldots, \qquad (3)$$

es absoluta y uniformemente convergente. Si z es una cantidad imaginaria, la aplicación de la fórmula (2) nos conduce á la misma serie (3) absoluta y uniformemente convergente para todo valor de z de módulo menor que la unidad; por consiguiente, la función definida por la serie (3) será holomorfa en el interior de un círculo descrito desde el origen como centro y con radio igual á la unidad.

Ahora bien, si suponemos $m = \frac{p}{q}$, la fórmula de Moivre nos dice que la función $u = (1+z)^{\frac{p}{q}}$ tiene q valores, y como la serie (3) no nos da más que uno solo de u para cada valor de z contenido en el círculo de convergencia, debemos examinar cuál de estos q valores es el que, en realidad, nos da la serie. Para ello, si hacemos

$$1 + z = 1 + x + yi = \rho(\cos.\, \alpha + i\,.\, \text{sen.}\, \alpha),$$

se tiene

$$1+x=\rho \cos.\alpha, \qquad y=\rho \operatorname{sen}.\alpha,$$

$$\rho=\sqrt{(1+x)^2+y^2}, \qquad \operatorname{sen}.\alpha=\frac{y}{\rho}, \qquad \cos.\alpha=\frac{1+x}{\rho},$$

y además

$$(1+z)^{\frac{p}{q}}=\rho^{\frac{p}{q}}\left[\cos.\frac{(\alpha+2k\pi)p}{q}+i.\operatorname{sen}.\frac{(\alpha+2k\pi)p}{q}\right]. \quad (4)$$

Si hacemos $z=0$, ó lo que es igual $\left\{\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}$, se tiene $\rho=1$, $\alpha=0$; y como para esta hipótesis la serie (3) se reduce á la unidad, el valor por ella representado es el deducido, suponiendo $k=0$ en la forma (4), ó sea el

$$\rho^{\frac{p}{q}}\left[\cos.\frac{p\alpha}{q}+i.\operatorname{sen}.\frac{p\alpha}{q}\right].$$

II. Desarrollo en serie de $l(1+z)$.—Si z es un número real, la serie

$$l(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\dots=\sum_1^\infty(-1)^n\frac{z^n}{n}, \qquad (5)$$

es absoluta y uniformemente convergente para $z=+1$, y para todo valor de z menor que la unidad en valor absoluto. Si z es un número complejo, la aplicación de la fórmula (2) á la función $u=l(1+z)$, nos conduce á una serie de idéntica forma, absoluta y uniformemente convergente para todo valor de z de módulo menor que la unidad; por consiguiente, la función definida por la serie (5) será holomorfa en el interior del círculo descrito desde el origen como centro, y con radio igual á la unidad.

Ahora bien, si empleamos las mismas notaciones que en la aplicación anterior, sabemos (núm. 29), que se tiene

$$u=l((1+z))=l\rho+(\alpha+2k\pi)i, \qquad (6)$$

es decir, que u es infinitiforme, y, por tanto, como la serie (5) no da más que un valor de u para cada valor de z, es

preciso examinar cuál de los valores contenidos en la forma (6) es el que da la serie. Para ello observemos que si $z = 0$, la serie se reduce á $u = 0$; y como para este valor se tiene $\rho = 1$, $\alpha = 0$, el valor correspondiente de la forma (6) es el que se obtiene suponiendo $k = 0$, ó sea,

$$u = l(1 + z) = l\rho + \alpha i,$$

es decir, *el valor principal* de $l((1 + z))$.

III. Desarrollo en serie de la función arc. tg. z.—Si z es un número real, la serie

$$u = \text{arc. tg.}\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots, \qquad (7)$$

es absoluta y uniformemente convergente para valores de z menores que la unidad, y es sabido que, entre estos límites, no existe más que un valor de u comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$; y, además, que cuando z tiende hacia cero, el valor correspondiente de u tiende también hacia cero. Si se trata de aplicar el desarrollo anterior al caso en que z es un número complejo, veremos que la serie es también absoluta y uniformemente convergente para todo valor de z de módulo inferior á la unidad, y, por tanto, que la función definida por la serie (7) es holomorfa en el interior del círculo descrito desde el origen como centro, y con radio igual á la unidad.

Ahora bien, la función $u = arc.\ tg. z$ es susceptible de los infinitos valores contenidos en la expresión (n.° 31)

$$u = \text{arc. tg.}\, z = \frac{1}{2i}\, l\left(\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right)\right),$$

y se deberá tomar como correspondiente al único que da la serie (7) aquel que tenga por límite cero para $lim. \mid z \mid = 0$. Si hacemos

$$\frac{1 + zi}{1 - zi} = \rho(\cos.\alpha + i.\text{sen.}\alpha) = \rho e^{\alpha i},$$

la expresión anterior toma la forma

$$u = \text{arc. tg.}\, z = \frac{1}{2i}\,[l\rho + (\alpha + 2k\pi)i],$$

y el valor que tiene por límite cero para *lím.* $|z| = 0$, es el

$$u = \frac{1}{2i}\,(l\rho + \alpha i),$$

y, por tanto, este es el valor representado por la serie (7) (*).

57. Teorema y serie de Laurent.—*Si* f(z) *es una función holomorfa para los valores de* z *comprendidos en el interior de una corona circular que tiene por centro un cierto punto* a, *y* z_1 *es un punto de esta corona* (fig. 16); *vamos á demostrar que* $f(z_1)$ *será desarrollable en una doble serie absoluta y uniformemente convergente de la forma*

$$f(z_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m(z_1 - a)^m,$$

siendo

$$A_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Fig. 16.

En efecto, sean C y C' las dos circunferencias de radios r y r' que limitan la corona; sea β un círculo infinitamente pequeño que envuelve al punto z_1 se tendrá

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta} \frac{f(z)dz}{z - z_1}.$$

Como la función $f(z)$ se supone holomorfa en el área li-

(*) Para una discusión detenida de las series (3), (5) y (7), presentada bajo forma muy diversa de la adoptada aquí, véase la obra *Mansión* (17).

mitada por los círculos C, C' y β, se tiene

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_1} = \int_{C'} \frac{f(z)dz}{z-z_1} + \int_\beta \frac{f(z)dz}{z-z_1},$$

de donde

$$\int_\beta \frac{f(z)dz}{z-z_1} = \int_C \frac{f(z)dz}{z-z_1} - \int_{C'} \frac{f(z)dz}{z-z_1},$$

y, por tanto,

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_1} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)dz}{z-z_1}. \qquad (1)$$

En la primera de estas dos integrales se tiene constantemente $| z - a | > | z_1 - a |$ y, por tanto, la fracción $\frac{1}{z-z_1}$ se podrá desarrollar en la serie absoluta y uniformemente convergente

$$\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{(z-a)-(z_1-a)} =$$

$$\frac{1}{z-a} + \frac{z_1-a}{(z-a)^2} + \frac{(z_1-a)^2}{(z-a)^3} + \dots,$$

y el valor de la integral será, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-a} + \frac{z_1-a}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + \dots,$$

ó, lo que es igual,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_1} = \sum_0^\infty A_n(z_1-a)^n,$$

siendo

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}. \qquad (2)$$

En la integral $\int_{C'} \frac{f(z)dz}{z - z_1}$ se tiene constantemente

$$|z - a| < |z_1 - a|,$$

y se puede escribir

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1 - z} = -\frac{1}{(z_1 - a) - (z - a)} =$$

$$-\frac{1}{z_1 - a} - \frac{z - a}{(z_1 - a)^2} - \frac{(z - a)^2}{(z_1 - a)^3} - \ldots,$$

serie absoluta y uniformemente convergente; por consiguiente, el valor de la integral será

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)dz}{z - z_1} = -\frac{(z_1 - a)^{-1}}{2\pi i}\int_{C'} f(z)dz -$$

$$-\frac{(z_1 - a)^{-2}}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)dz}{(z - a)^{-1}} - \frac{(z_1 - a)^{-3}}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)dz}{(z - a)^{-2}} - \ldots,$$

ó, lo que es igual,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)dz}{z - z_1} = -\sum_{1}^{\infty} A_{-n}(z_1 - a)^{-n},$$

siendo

$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)dz}{(z - a)^{-n+1}}. \qquad (3)$$

Ahora bien, las dos integrales cuyos valores acabamos de determinar, no cambian si en lugar de tomarlas á lo largo de las circunferencias C y C', se toman á lo largo de una circunferencia C'' contenida en el interior de la corona, y que no pasa por z_1, luego, sustituyendo las expresiones (2) y (3) en la fórmula (1), después de verificado este cambio en la línea

de integración, se tendrá

$$f(z_1)=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n(z_1-a)^n, \quad \text{siendo} \quad A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},$$

fórmula que constituye el teorema y serie de Laurent.

Observación.—El desarrollo en serie de la función $f(z_1)$ *que da el teorema de Laurent, es único.*

Supongamos, en efecto, que por otro procedimiento cualquiera se obtuviese el desarrollo

$$f(z_1)=\sum_{-\infty}^{+\infty} A'_n(z_1-a)^n.$$

Restando de este desarrollo el anterior, se obtendrá

$$\Sigma(A'_n-A_n)(z_1-a)^n=0;$$

dividiendo los dos miembros de esta ecuación por $(z_1-a)^{n+1}$, multiplicando por $d(z_1-a)$, é integrando á lo largo de una circunferencia concéntrica con las que limitan la corona é interior á ella, se tiene que cada uno de los términos es una función racional que tomará el valor inicial cuando se vuelva al punto de partida, y las integrales correspondientes serán nulas. No habrá más excepción que la del término que contenga á $(z_1-a)^{-1}$, el cual tendrá por integral indefinida $(A'_n-A_n) . l(z_1-a)$, y por integral á lo largo de la circunferencia considerada $(A'_n-A_n) . 2\pi i$; pero como la integral total es nula, se tiene

$$(A'_n-A_n)\,2\pi i=0, \qquad \text{ó sea,} \qquad A'_n=A_n,$$

lo que demuestra la proposición enunciada.

Nota. – La fórmula (4) puede presentarse, utilizando notaciones ya explicadas, bajo la forma

$$f(z)=P(z-a)+P\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

pudiendo z recibir cualquier valor contenido en el interior de la corona considerada.

58. Idea de la prolongación analítica.—El teorema y serie de Cauchy, expuesto en uno de los párrafos precedentes (núm. 53), ha dado origen á una idea muy fecunda en el Análisis moderno y de la cual hizo uso constante Weierstrass en su teoría de las funciones analíticas, esta idea es la de *la prolongación analítica* de una serie, y de ella vamos á dar en este párrafo una sucinta noticia (*).

Si consideramos una serie de potencias

$$P(z-a) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots$$

absoluta y uniformemente convergente en el interior de un círculo de centro a y de radio R, que suponemos distinto de cero, esa serie define una función $f(z)$, finita, continua, monodroma y monogena, es decir, holomorfa, en el interior del círculo C (figura 17), de modo que

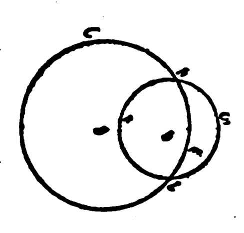


Fig. 17.

$$f(z) = P(z-a),$$

para todo valor de z contenido en C. Tomemos en el interior de C un punto b, distinto del a, y describamos, haciendo centro en b, un círculo C' que esté contenido en C; el mayor valor que se puede asignar al radio de este círculo es evidentemente $R - |a-b|$ mínima distancia del punto b á la circunferencia de C. En el interior del círculo C' la función $f(z)$ sigue siendo holomorfa, y, por consiguiente, se-

(*) Para más detalles sobre esta cuestión, véanse las obras señaladas con los números (1), (9), (12) y (21), así como la siguiente: HADAMARD (J.): *La Série de Taylor et son prolongement analytique.* 1 vol. 8.° menor. Vol. 12 de la colección *Scientia*. Paris, 1901.

gún el teorema de Cauchy, desarrollable en una serie de potencias del binomio $z - b$, de la forma

$$P_1(z-b) = b_0 + b_1(z-b) + \dots + b_n(z-b)^n + \dots;$$

por consiguiente, en el área C' tenemos de la función $f(z)$ dos representaciones analíticas de forma distinta

$$f(z) = P(z-a), \qquad f(z) = P_1(z-b).$$

El círculo de convergencias de la serie $P_1(z-b)$ es á lo menos C'; pero puede ocurrir que sea de radio

$$R' > R - |a-b|;$$

si esto ocurre designémosle por C_1, y en tal caso, la serie $P_1(z-b)$ que en el área $kklm$ común á los círculos C y C_1 representa la función $f(z)$, conserva un significado preciso y perfectamente determinado en la parte de círculo C_1 no común con el C, pues sigue representando una función holomorfa en esta parte del plano; cuando esto sucede se dice que la serie $P_1(z-b)$ da una ***prolongación analítica*** de la serie $P(z-a)$, ó también, que la función $f(z)$, definida al principio en el interior del círculo C por la serie $P(z-a)$ ha sido prolongada analíticamente en la parte no común á los círculos C y C_1. De un modo general si se construye una sucesión de series de la forma

$$P(z-a), \quad P_1(z-b), \quad P_2(z-c), \dots P_n(z-l), \qquad (1)$$

cada una de las cuales se deduce de la precedente, del mismo modo que la $P_1(z-b)$ se ha deducido de la $P(z-a)$, la última $P_n(z-l)$ se dice que se ha deducido de la primera por medio de *una prolongación analítica*.

Para precisar la definición precedente vamos á demostrar el siguiente

Teorema.—*Si una serie* $P_n(z-l)$ *se origina por prolongación analítica de otra,* $P(z-a)$, *esta última puede derivarse de la primera por una prolongación analítica.*

Será suficiente demostrar la proposición para dos series consecutivas $P(z-a)$ y $P_1(z-b)$ de la sucesión (1). Si el círculo C_1 de convergencia de $P_1(z-b)$ contiene en su interior el centro a del círculo C de convergencia de $P(z-a)$, la proposición es evidente. Si no lo contiene, observemos que la función $f(z)$ es holomorfa en el área formada por la parte común de los círculos C y C_1, y, por tanto, tomando en esta área un punto a', la función $f(z)$ será desarrollable en una serie de potencias de $z-a'$ cuyo círculo de convergencia tenga un radio igual *á lo menos* á la mínima distancia de a' al contorno: es evidente, que podemos tomar sobre la línea que une a con b una serie finita de puntos $a', a'', \dots a^{(n)}$ tales que los círculos de convergencia correspondientes C', C'', ... $C^{(n)}$ tengan cada uno su centro en el interior del círculo anterior, y tal, que a' esté en el interior de C_1, y a en el interior de $C^{(n)}$, y entonces la sucesión

$$P_1(z-b), \quad P'(z-a') \dots P^{(n)}(z-a^{(n)}), \quad P(z-a),$$

conduce por prolongación analítica de $P_1(z-b)$ á $P(z-a)$ como se quería demostrar.

CAPÍTULO IX

Propiedades de las funciones holomorfas y meromorfas.

59. Teorema I.—*Una función monodroma y monogena en toda la extensión del plano, se hace necesariamente infinita para un valor finito ó infinito de su variable.*

En efecto, de la expresión

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \quad \text{se deduce} \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2};$$

si tomamos por contorno de integración una circunferencia de radio r y centro a, y hacemos

$$z - a = re^{\theta i}, \qquad dz = rie^{\theta i}d\theta,$$

se deduce

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{\theta i})d\theta}{re^{\theta i}},$$

ó sea

$$2\pi r f'(a) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{\theta i})e^{-\theta i}d\theta.$$

Si designamos por M el valor máximo del módulo de

$f(a + re^{\theta i})$, se tiene

$$2\pi r \cdot |f'(a)| \overline{\gtrless} \int_0^{2\pi} M d\theta = 2\pi M,$$

ó, lo que es igual,

$$M > r \cdot |f'(a)|.$$

Se puede suponer siempre $|f'(a)| \neq 0$, pues si $|f'(a)| = 0$ para cualquier valor de a, $f(z)$ sería una constante; y como r puede ser mayor que cualquier número dado, si $|f(z)|$ no es infinito para un valor finito de z, lo será para uno infinito.

Corolario I.—Una función monodroma y monogena en toda la extensión del plano, se hace necesariamente nula para un valor finito ó infinito de su variable.

Pues si $f(z)$ no se hiciese nula, la función $\frac{1}{f(z)}$, que también es monodroma y monogena, no se haría infinita, lo cual no es posible.

Corolario II.—Una función monodroma y monogena en toda la extensión del plano, adquiere todos los valores posibles.

En efecto, la función $f(z)$ tiene que adquirir un cierto valor arbitrario A, porque la función $f(z) - A$ toma necesariamente el valor cero.

60. Funciones holomorfas.—Teorema II.—*Una función holomorfa en toda la extensión del plano, y cuyo módulo es constantemente inferior á un número finito y determinado, se reduce á una constante.*

En efecto, una función $u = f(z)$ holomorfa en toda la extensión del plano, es desarrollable en una serie absoluta y uniformemente convergente de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + a_n(z - a)^n + \dots, \quad (1)$$

cuyos coeficientes vienen dados por la fórmula (n.° 53)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_a \frac{f(z)dz}{(z - a)^{n+1}},$$

ó sea, haciendo $z - a = re^{\theta i}$, y, por tanto, $dz = rie^{\theta i}d\theta$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a + re^{\theta i})e^{-n\theta i}d\theta,$$

en cuya expresión r es arbitrario. Si sobre la circunferencia de radio r, el módulo de $f(z)$ permanece inferior á un número finito M, el de a_n, que es

$$|\, a_n \,| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} M . d\theta = \frac{M}{r^n},$$

tenderá hacia cero puesto que r puede suponerse tan grande como se quiera. Así que todos los coeficientes de la serie (1), á partir del segundo, son nulos, y, por consiguiente, la función $f(z)$ se reduce á la constante a_0.

Nota.—Esta proposición, que es fundamental en esta teoría, se debe á Liouville.

Teorema III.—*Una función holomorfa en el interior de un área conexa, y todas sus derivadas, no pueden anularse al mismo tiempo para un valor de la variable contenido en esta área.*

En efecto, si $f(z)$ y todas sus derivadas se anulan para $z = a$ (fig. 18), tracemos desde el punto a un círculo de radio r, bastante pequeño para que esté contenido por completo en el área C; sea x un punto contenido en el interior de este círculo, y z_1 un punto de su circunferencia: en las hipótesis sentadas la fórmula de Taylor se reduce á

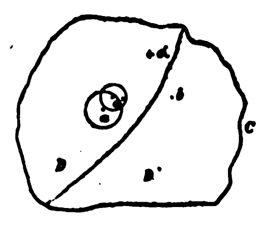


Fig. 18.

$$f(x) = \lambda . r . \left(\frac{x - a}{z_1 - a}\right)^{n+1} . \frac{f(z_1)}{z_1 - x},$$

siendo λ el factor de Darboux. Como el punto z_1 está sobre la circunferencia $|\, z_1 - a \,| = r > |\, x - a \,|$, luego podrá

tomarse n suficientemente grande para que $\left(\frac{x-a}{z_1-a}\right)^{n+1}$ tenga un módulo tan pequeño como se quiera, y, por tanto, $f(x)=0$, es decir, que la función propuesta es nula en todo el interior del círculo de radio r.

Vamos ahora á probar que si tal sucede será nula también en toda el área C. Para ello, supongamos que la función es nula nada más que en una región de esta área, la D, por ejemplo, sin serlo en otra parte D' del área C. Sea b un punto de D' muy próximo á la línea de separación de las dos regiones, y tal que $f(b) \neq 0$: se puede suponer siempre que en la región D existe un punto a bastante próximo á b para que una circunferencia que tenga su centro en a y de radio algo superior á ab esté contenida en C; según lo demostrado, en el centro de esta circunferencia y en todo punto situado en el círculo que limita, $f(x)$ y sus derivadas son nulas, luego se tiene necesariamente $f(b)=0$. Si un círculo de radio mayor que ab no estuviese contenido en el área C, se trazaría desde a un círculo con radio cualquiera, después otro que tuviera como centro un punto a' del primero, de modo que $a'b < ab$, y así sucesivamente hasta llegar á uno en cuyo interior estuviese contenido el punto b elegido.

Teorema IV.—*Una función holomorfa en el interior de un área simplemente conexa, no puede ser constante en una parte finita de esta área, ni aun á lo largo de una curva, sin ser constante en toda la extensión del área.*

En efecto, supongamos que la función $f(z)$ pudiese tomar el valor constante A en una porción finita del área C; la función $f(z)-A$ y todas sus derivadas serán nulas en esta región de C, y, por consiguiente, en uno de sus puntos, luego será nula en toda la extensión de C, y $f(z)$ será constante en toda esta área.

Corolario.—Dos funciones holomorfas en el interior de un área conexa, é iguales en una porción finita de ella, son iguales en toda la extensión del área.

Pues siendo nula su diferencia en una región finita de esta área, lo será también en toda la extensión de la misma.

TEOREMA V.—*Si la función* f(z) *es holomorfa en el interior de un área conexa* C, *y se anula para el valor* $z = a$, *siendo* a *un punto del área* C, f(z) *es de la forma*

$$f(z) = (z - a)^m . \varphi(z),$$

siendo m *un número finito entero y positivo, y* $\varphi(z)$ *una función que no es cero ni infinito para* $z = a$.

En efecto, si a es un punto de C, describiendo desde a como centro una circunferencia que esté contenida en C, para todo punto situado en el interior se tiene

$$f(z) = f(a) + f'(a).(z - a) + ... + f^{(m)}(a) \frac{(z - a)^m}{m!} +$$

$$f^{(m+1)}(a) \frac{(z - a)^{m+1}}{|(m + 1)!} + ..$$

Sea $f^{(m)}(a)$ la primera de las derivadas de $f(z)$ que no es cero para $z = a$, se tendrá

$$f(z) = (z - a)^m \left[f^{(m)}(a) . \frac{1}{m!} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{(m + 1)!} f^{(m+1)}(a).(z - a) + ... \right] = (z - a)^m . \varphi(z)$$

haciendo

$$\varphi(z) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{1}{(m + 1)!} f^{(m+1)}(a).(z - a) + ... ;$$

la función $\varphi(z)$ es continua, monodroma y monogena en el dominio del punto a, no es cero para $z = a$, y tampoco es infinita para este valor, pues entonces no se podría afirmar que $f(z)$ es cero para el referido valor.

Nota.—El punto a se dice que es *un cero* de la función $f(z)$, y el orden m de la primera derivada de $f(z)$ que no se

anula para $z = a$, se dice que es su ***orden* ó *grado de multiplicidad*.**

Corolario I.—De la expresión $f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$ se deduce

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1} . \varphi(z) + (z - a)^m . \varphi'(z) =$$
$$(z - a)^{m-1} [m\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)],$$

ó sea

$$f'(z) = (z - a)^{m-1} . \psi(z),$$

haciendo

$$\psi(z) = m\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z);$$

$\psi(z)$ es una función holomorfa en el área dada, y que no se anula para $z = a$; y de aquí se deduce que: ***un cero de grado* m *de una función*, *es un cero de grado* m — 1 *de su primera derivada***, y, por tanto, ***del grado* m — 2 *de la segunda derivada***, etc.

Corolario II.—***Si la función* f(z) *es holomorfa en el interior de un área* C, *y se anula para los valores* a_1, a_2, a_3. ..., *siendo* a_1, a_2, a_3, ... *puntos situados en el interior de* C, f(z) *será de la forma***

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} (z - a_2)^{m_2} (z - a_3)^{m_3} \ldots \varphi(z),$$

***siendo* m_1, m_2, m_3, ... *números finitos*, *enteros y positivos*, *y* $\varphi(z)$ *una función holomorfa que no es cero ni infinito para* $z = a_1$, a_2, a_3, ...**

En efecto, por ser a_1 un cero de $f(z)$ de grado m_1 de multiplicidad, se tendrá

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} . f_1(z);$$

$f(z)$ se anula para $z = a_2$, y como $z - a_1$ no es nula para este valor deberá serlo $f_1(z)$, y, por tanto, se tendrá

$$f_1(z) = (z - a_2)^{m_2} . f_2(z),$$

y, como consecuencia,

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} . (z - a_2)^{m_2} . f_2(z);$$

repitiendo el mismo razonamiento se llegará á la fórmula enunciada.

TEOREMA VI.—*Si una función es holomorfa en un área conexa, cada una de sus raíces es de grado entero y finito, y su número es limitado.*

Si $f(z)$ es una función holomorfa en el área C, y a es una de sus raíces, se tiene (teor. V),

$$f(z) = (z - a)^m . \varphi(z),$$

siendo m un número entero y finito, y $\varphi(z)$ la serie

$$\varphi(z) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) . (z - a) + \ldots,$$

absoluta y uniformemente convergente en el círculo de centro a y de un radio tal que esté contenido en el área C. Si designamos por ρ el radio de este círculo, se puede determinar un número $\rho_1 \leq \rho$, y tal, que para todos los valores de $z - a$ cuyo módulo sea inferior á ρ_1 el módulo del primer término de $\varphi(z)$ sea mayor que la suma de los módulos de todos los demás; y es evidente que el círculo descrito desde el punto a con radio ρ_1 no comprenderá ninguna raíz de la función $\varphi(z)$, y, por consecuencia, no contendrá ninguna raíz de $f(z)$ distinta de la $z = a$. De aquí resulta que el número de raíces de $f(z)$ contenidas en el área C es limitado ó finito.

Supongamos, en efecto, que esta área comprendiese un número infinito de raíces: dividámosla en un número finito de partes de un modo cualquiera; una de estas partes, á lo menos, C_1, por ejemplo, contendrá un número infinito de raíces; subdividamos C_1 en un número finito de partes, y una de ellas, cuando menos, la C_2, por ejemplo, comprenderá infinitas raíces; continuando este razonamiento se formará una sucesión ilimitada de áreas C, C_1, C_2, ..., cada vez más peque-

ñas, comprendiendo cada una de ellas á todas las siguientes, y conteniendo una cualquiera un número infinito de raíces de $f(z)$. Como la división en partes de las áreas se puede realizar de manera que todas las dimensiones del área C_n tiendan hacia cero cuando n crece indefinidamente, es evidente que las áreas tienen por límites puntos determinados del plano que son ceros de $f(z)$, entre ellos el a, por ejemplo; pero entonces alrededor de a sería imposible describir un círculo de centro a y radio finito ρ_1 en cuyo interior no existiese más raíz que la $z = a$, contra lo antes demostrado.

61. Funciones meromorfas.—Teorema VII.—*Una función meromorfa en el interior de un área conexa, y todas sus derivadas no pueden anularse al mismo tiempo para un valor de la variable contenido en esta área.*

Sea $f(z)$ una función meromorfa en el interior del área conexa C (fig. 18). Consideremos un punto raíz a situado en el interior de C: teniendo en cuenta la definición de continuidad, será posible describir desde el punto a como centro un círculo tal, que en todos los puntos contenidos en su interior el módulo de la función sea menor que un número dado, y este círculo no comprenderá ningún polo de $f(z)$.

Supongamos ahora que en el punto a la función y todas sus derivadas sean nulas: desde el punto a como centro y con un radio igual ó menor que la distancia de a al polo más próximo de $f(z)$, el α, por ejemplo, describamos un círculo contenido en el área C; como la función $f(z)$ es holomorfa en el interior de ese círculo, será nula en toda su extensión (teorema III). Si el radio del círculo trazado es igual á la distancia $a\alpha$, se tendría un punto raíz tan próximo al punto α como se quisiese, lo cual no es posible por la continuidad de la función. Si el radio es más pequeño que esta distancia, desde un punto a' interior al círculo y con un radio igual ó menor que $a'\alpha$ describiremos un segundo círculo comprendido en el área C, y para el cual repetiríamos el razonamiento anterior; y avanzando así, poco á poco, se llegaría siempre

á tener un punto raíz tan próximo al polo α como se quisiese, lo cual no es posible.

Teorema VIII. —*Si una función es meromorfa en el interior de un área conexa, cada una de las raíces y de los polos contenidos en esta área son de grado entero y finito, y su número es limitado.*

Conservando las notaciones empleadas en los teoremas anteriores, sea a un punto raíz de $f(z)$ situado en el interior del área C; desde el punto a como centro, con un radio ρ, igual ó menor que la distancia de a al polo más próximo, describamos un círculo contenido en el área C; la función $f(z)$ será holomorfa en ese círculo, y no pudiendo ser nulas todas sus derivadas en el punto a, la raíz a es de un grado entero y finito m, que es el orden de la primera derivada de $f(z)$ que no se hace cero para $z = a$, luego se tendrá

$$f(z) = (z - a)^m . \varphi(z),$$

siendo $\varphi(z)$ una función holomorfa en el círculo de radio ρ, que no se anula para $z = a$, y meromorfa en el resto del área C con los mismos polos y los mismos ceros que $f(z)$, á excepción del cero a.

Se podrá determinar un número $\rho_1 \leq \rho$, y tal, que el círculo descrito desde el punto a como centro con el radio ρ_1 no contenga ningún cero de $\varphi(z)$, y en seguida se demostrará, como anteriormente (teor. III), que el número de raíces de $f(z)$ contenidas en el área C es limitado.

Consideremos ahora la función $\frac{1}{f(z)}$, que es meromorfa en el área C, como la $f(z)$, y que admite como raíces los polos de ésta, y al contrario. Sea α un polo de $f(z)$, este punto es una raíz de $\frac{1}{f(z)}$, que será de grado entero y finito, μ, por ejemplo, y se tiene

$$\frac{1}{f(z)} = (z - \alpha)^\mu . \psi_1(z),$$

siendo $\psi_1(z)$ una función meromorfa en el área C, que no es cero ni infinito para $z = \alpha$. De la expresión anterior se deduce

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^{\mu}} \cdot \frac{1}{\psi_1(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-\alpha)^{\mu}},$$

siendo $\psi(z)$ una función también meromorfa en el área C, y que no es cero ni infinito para $z = \alpha$.

Como la función $\frac{1}{f(z)}$ sólo admite un número limitado de ceros en el área C, la $f(z)$ no admitirá más que un número finito y limitado de polos en esta misma área.

Nota.—El exponente μ se llama ***orden*** ó ***grado de multiplicidad*** del polo α.

Corolario I.—De la expresión

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^{\mu}} = (z-a)^{-\mu} \cdot \psi(z)$$

se deduce

$$f'(z) = (z-\alpha)^{-\mu} \cdot \psi'(z) - \mu(z-\alpha)^{-\mu-1} \cdot \psi(z) =$$

$$(z-\alpha)^{-\mu-1}\left[(z-\alpha)\psi'(z) - \mu \cdot \psi(z)\right] = \frac{\lambda(z)}{(z-\alpha)^{\mu+1}},$$

haciendo

$$\lambda(z) = (z-\alpha) \cdot \psi'(z) - \mu \cdot \psi(z);$$

la función $\lambda(z)$ es meromorfa en el área C y no se anula ni hace infinita para $z = \alpha$; luego, *un polo de grado μ de una función meromorfa es polo de grado $\mu + 1$ de su primera derivada*, y, por tanto, *del grado $\mu + 2$ de la segunda*, etc.

Corolario II.—Si la función f(z) *es meromorfa en el interior de un área conexa* C *y admite los polos* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, *siendo* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *puntos situados en el interior de* C, f(z) *será de la forma*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}(z-\alpha_3)^{\mu_3}\ldots},$$

siendo $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ *números finitos, enteros y positivos, y* $\varphi(z)$ *una función que no es nula ni infinita para* $z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

La demostración de esta proposición es idéntica á la del corolario II del teorema V.

Corolario III.—Si $f(z)$ *es una función meromorfa en un área conexa* C, *y admite en ella los ceros* $a_1, a_2, \dots$ *con los grados* $m_1, m_2, \dots$, *de multiplicidad, y los polos* $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ *con los grados de multiplicidad* $\mu_1, \mu_2, \dots$, $f(z)$ *puede ponerse bajo la forma*

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\dots}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\dots} \cdot \varphi(z),$$

representando $\varphi(z)$ *una función que no es cero ni infinito para* $a_1, a_2, \dots \alpha_1, \alpha_2, \dots$

Teorema IX.—*Una función* $f(z)$ *meromorfa en un área conexa, es igual á una fracción racional más una función holomorfa en la misma área.*

La función $f(z)$ admitirá en el área propuesta un número finito de polos $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ con los grados $\mu_1, \mu_2, \dots$ de multiplicidad, y en virtud del teorema precedente, se tendrá

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}}, \quad \text{ó sea} \quad \varphi(z) = (z-\alpha_1)^{\mu_1} \cdot f(z);$$

siendo $\varphi(z)$ una función holomorfa en el dominio del punto α_1, se podrá desarrollar en una serie ordenada según las potencias enteras y positivas de $z - \alpha_1$, serie absoluta y uniformemente convergente en un círculo de centro α_1 y radio tan pequeño como queramos, y se tendrá

$$\varphi(z) = A_{\mu_1} + A_{\mu_1 - 1}(z-\alpha_1) + \dots + A_1(z-\alpha_1)^{\mu_1 - 1} + f_1(z) \cdot (z-\alpha_1)^{\mu_1},$$

representando $f_1(z)$ una función holomorfa en el círculo de convergencia. De aquí se deduce

$$f_1(z) = f(z) - \frac{A_{\mu_1}}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}} - \frac{A_{\mu_1 - 1}}{(z-\alpha_1)^{\mu_1 - 1}} - \dots - \frac{A_1}{z-\alpha_1}$$

La función $f_1(z)$ así definida, es meromorfa en el área dada, y admite los mismos polos que $f(z)$, á excepción del $z = \alpha_1$. Por tanto, se tendrá

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{(z - \alpha_2)^{\mu_2}}, \quad \text{ó sea} \quad \varphi_1(z) = (z - \alpha_2)^{\mu_2} . f_1(z),$$

en cuya expresión $\varphi_1(z)$ representa una función holomorfa en el dominio del punto $z = \alpha_2$; desarrollándola en serie, se tiene

$$\varphi_1(z) = B_{\mu_2} + B_{\mu_2 - 1}(z - \alpha_2) + \ldots + B_1(z - \alpha_2)^{\mu_2 - 1} + f_2(z).(z - \alpha_2)^{\mu_2},$$

siendo $f_2(z)$ holomorfa en el círculo de convergencia. De aquí se deduce

$$f_2(z) = f_1(z) - \frac{B_{\mu_2}}{(z - \alpha_2)^{\mu_2}} - \frac{B_{\mu_2 - 1}}{(z - \alpha_2)^{\mu_2 - 1}} - \ldots - \frac{B_1}{z - \alpha_2}.$$

La función $f_2(z)$ así definida es meromorfa en el área propuesta y admite los mismos polos que $f(z)$, á excepción de los $z = \alpha_1$, $z = \alpha_2$. Continuando de esta manera se llega á una función $f_n(z)$ holomorfa en toda el área dada, y se tiene

$$f(z) = \left.\begin{array}{l} \dfrac{A_{\mu_1}}{(z - \alpha_1)^{\mu_1}} + \dfrac{A_{\mu_1 - 1}}{(z - \alpha_1)^{\mu_1 - 1}} + \ldots + \dfrac{A_1}{z - \alpha_1} \\ + \dfrac{B_{\mu_2}}{(z - \alpha_2)^{\mu_2}} + \dfrac{B_{\mu_2 - 1}}{(z - \alpha_2)^{\mu_2 - 1}} + \ldots + \dfrac{B_1}{z - \alpha_2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + f_n(z) \end{array}\right\} ; \quad (1)$$

expresión que demuestra el teorema enunciado.

Observación I.—La función $\varphi(z)$ no se anula para $z = \alpha_1$, luego $A_{\mu_1} \neq 0$, y lo mismo les pasa á $B_{\mu_2}, \ldots$; pero todos los

demás coeficientes $A_{\mu_1-1}, \dots A_1, B_{\mu_2-1}, \dots B_1, \dots$ pueden ser cero.

Observación II.—Según ya sabemos (n.° 60, teor. I), los coeficientes $A_1, B_1, \dots$ son los *residuos* de la función $f(z)$ tomados alrededor de los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ respectivamente.

62. Propiedades generales.—TEOREMA X.—*Una función monodroma y monogena, que no es infinita más que para $z = \infty$, sin ser indeterminada, es una función entera.*

En efecto, sea $f(z)$ la función dada; hagamos $z = \frac{1}{z'}$, la función se convertirá en

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z').$$

La función $\varphi(z')$ se hace infinita para $z' = 0$, sin ser indeterminada; luego, en virtud del teorema IX (n.° 61), se la puede poner bajo la forma

$$\varphi(z') = \frac{A_n}{z'^n} + \frac{A_{n-1}}{z'^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{z'} + \psi(z');$$

en la cual $A_n, A_{n-1}, \dots A_1$ son números constantes. La función $\psi(z')$ no es infinita para ningún valor de z', luego es una constante que podemos representar por A_0, y, por tanto,

$$\varphi(z') = \frac{A_n}{z'^n} + \frac{A_{n-1}}{z'^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{z'} + A_0,$$

y por ser $z' = \frac{1}{z}$,

$$z^n . \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = f(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_{n-1} z^{n-1} + A_n z^n,$$

como se quería demostrar

Corolario.—Una función monodroma y monogena, que en

toda la extensión del plano no admite más que un número limitado de infinitos, es una fracción racional.

Pues si los infinitos de $f(z)$ son $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ esta función puede ponerse bajo la forma (1) dada en el teorema anterior, y en ella $f_n(z)$ no ser áinfinita más que para el valor $z = \infty$ luego es una función entera.

TEOREMA XI.—*Si una función* f(z) *es meromorfa en el interior de un área conexa* C, *la integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

tomada sobre el contorno del área, es igual á la suma de los residuos de la función relativos á los polos situados en el interior del área.

En efecto, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ designan los polos de $f(z)$ contenidos en el interior del área C, y alrededor de cada uno de estos puntos se trazan círculos de radios infinitamente pequeños, se tiene (n.º 47, cor. III)

$$\int_C = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} + \cdots + \int_{\alpha_n};$$

ahora bien, el valor de cada una de las integrales del segundo miembro de esta expresión no es más que el residuo de la función respecto al polo correspondiente multiplicado por $2\pi i$; luego la proposición queda demostrada.

Nota.—Según lo antes explicado (n.º 61), se tiene

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{A_{\mu_1}}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}} + \cdots + \frac{A_1}{z-\alpha_1} \\ & + \frac{B_{\mu_2}}{(z-\alpha_2)^{\mu_2}} + \cdots + \frac{B_1}{z-\alpha_2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{H_{\mu_n}}{(z-\alpha_n)^{\mu_n}} + \cdots + \frac{H_1}{z-\alpha_n} \\ & + f_1(z), \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = A_1 + B_1 + \dots + H_1.$$

TEOREMA XII.—*Si* $f(z)$ *es una función monodroma y monogena, sin puntos críticos esenciales, en el interior de un área simplemente conexa* C, *que posee en su interior los ceros* $a_1, a_2, \dots$, *con los grados de multiplicidad* $m_1, m_2, \dots$, *respectivamente; y los infinitos* $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ *con los grados de multiplicidad* $\mu_1, \mu_2, \dots$; *y* $F(z)$ *es una función holomorfa en el interior de la misma área, vamos á demostrar que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,.\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \Sigma m_h F(a_h) - \Sigma \mu_k F(\alpha_k),$$

tomando la integral á lo largo de un contorno interior al área y tan poco distante del de ésta como podamos desear.

En efecto, por tener $f(z)$ los ceros y polos que se citan en el enunciado, se podrá poner bajo la forma

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\dots}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\dots}\,.\,\varphi(z),$$

siendo $\varphi(z)$ una función que no es cero ni infinito para ningún punto del interior del área, y, por consecuencia, una función holomorfa en ella. Tomando la derivada logarítmica de los dos miembros de la expresión anterior, se tiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \Sigma\,\frac{m_h}{z-a_h} - \Sigma\,\frac{\mu_k}{z-\alpha_k} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)};$$

multiplicando los dos miembros de esta expresión por

$$\frac{1}{2\pi i}\,.\,F(z)dz,$$

é integrando á lo largo del contorno á que hemos hecho referencia, quedará

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\Sigma\int_C \frac{m_h F(z)dz}{z-a_h} -$$

$$\frac{1}{2\pi i}\Sigma\int_C \frac{\mu_k F(z)dz}{z-\alpha_k} + \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz;$$

observando ahora que

$$\int_C \frac{F(z)dz}{z-a} = 2\pi i F(a),$$

y que por ser $\varphi'(z)$ una función finita

$$\int_C \frac{F(z)\varphi'(z)dz}{\varphi(z)} = 0,$$

se tiene finalmente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma m_h F(a_h) - \Sigma\mu_k F(\alpha_k), \qquad (2)$$

como se quería demostrar.

Nota.—Este teorema, debido á Cauchy, es de la mayor importancia.

Corolario I.—Si el área C contiene un solo cero de $f(z)$, el a, y ningún infinito, se tendrá

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = F(a),$$

y si en esta expresión se supone $F(z) = z$, se reduce á

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = a,$$

fórmula que permite reemplazar el cálculo de una raíz de $f(z)$ por el de una integral definida cuando la raíz está ya separada.

Corolario II.—Si en la fórmula (2) se hace $F(z) = 1$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C D.l[f(z)] = \Sigma m_h - \Sigma \mu_h, \quad (3)$$

lo que nos dice que: *el número de ceros disminuído en el número de infinitos de una función monodroma y monogena contenidos en el interior de un área* C, *en cuyo interior la función no tiene puntos críticos esenciales, es igual á la integral*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C D.l[f(z)],$$

tomada á lo largo de C, *siempre que un cero ó un infinito de orden* k *de multiplicidad se cuente como* k *ceros ó como* k *infinitos.*

La integral que figura en el primer miembro de la fórmula (3) toma el nombre de *indicador logarítmico* de Cauchy.

Corolario III.—Tratemos de evaluar la integral (3), y para ello recordemos que la integral indefinida es

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = l.[f(z)],$$

y que si hacemos $f(z) = \rho e^{\theta i}$, se tiene

$$l((f(z))) = l.\rho + (\theta + 2k\pi)i,$$

y, por consiguiente,

$$\int D.l[f(z)] = \int D[l\rho + (\theta + 2k\pi)i].$$

Cuando la variable z parte de un punto del contorno de C para recorrerlo en sentido directo, parte con un valor del

módulo ρ_1 y uno del argumento θ_1, y cuando vuelve al punto de partida el valor de ρ es ρ_1, pero el de θ es un valor θ_2 que difiere de θ_1 en $2k\pi i$, siendo k un número entero positivo ó negativo, luego el valor de la integral definida será

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C D.l[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}(\theta_2 - \theta_1) = k,$$

luego podemos decir: *que el número de ceros de una función monodroma y monogena contenidos en el interior de un área, que no contiene puntos críticos esenciales, disminuído en el número de sus infinitos, es igual á la variación que experimenta el argumento de esta función cuando su variable recorre por completo el contorno del área en sentido directo, dividida por* 2π.

Nota.—Según lo dicho en teoremas anteriores, cualquiera que sea el valor de una función $f(z)$ en un punto a situado en el interior de un área en la cual es monodroma y monogena, existe siempre un número entero n, positivo, negativo ó nulo, tal que el cociente

$$\frac{f(z)}{(z-a)^n},$$

no es nulo ni infinito para el valor $z = a$; este número entero n es lo que se llama *el orden* ó *el índice* de la función en el punto a. Si la función dada no es cero ni infinito en el punto a, el índice es cero; si $f(z)$ se anula para $z = a$, el índice es un número positivo, y si se hace infinita el índice es un número negativo.

De la fórmula (8) se deduce que: *el indicador logarítmico de una función monodroma y monogena en el interior de un área, es igual á la suma de los índices de esta función.*

Aplicación.—Determinación del número de raíces de una ecuación algébrica racional y entera.—Sea la ecuación

$$f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m = 0;$$

según lo dicho en los párrafos anteriores, la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

dará el número de raíces contenidas en el interior de un área C, puesto que $f(z)$ no tiene ningún polo á distancia finita, y obtendremos el número total de raíces de la ecuación si tomamos por contorno de integración una circunferencia de radio infinito. Como se tiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{mz^{m-1} + (m-1)a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}}{z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m} =$$

$$\frac{m}{z}\left(1 - \frac{a_1}{mz} - \ldots\right) = \frac{m}{z}(1+\varepsilon),$$

siendo ε una cantidad infinitamente pequeña para $z = \infty$, la integral se convierte en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{m\,dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{m\varepsilon\,dz}{z}.$$

Haciendo $z = re^{\theta i}$, $dz = rie^{\theta i}d\theta$, el valor de la primera integral es

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{m\,dz}{z} = \frac{m}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{rie^{\theta i}d\theta}{re^{\theta i}} = m;$$

y el de la segunda es cero por ser $|\varepsilon| = 0$ para $z = \infty$; luego se tiene finalmente para el número de raíces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m.$$

Teorema XIII.—*Si dos funciones monodromas y monogenas en toda la extensión del plano, admiten los mismos ceros y los*

mismos infinitos, cada uno de ellos con iguales grados de multiplicidad, su razón es una función holomorfa en toda la extensión del plano; y si además, el módulo de la razón permanece inferior á una cantidad determinada, esta razón es una constante.

Sean, en efecto, las dos funciones $f(z)$ y $F(z)$; al admitir los mismos ceros y los mismos infinitos, con igual grado de multiplicidad, podrán ponerse bajo la forma

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots}\cdot\varphi(z),$$

$$F(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots}{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots}\cdot\psi(z),$$

siendo $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ dos funciones holomorfas en todo el plano, y que no son cero ni infinito para los valores $a_1, a_2, \ldots \alpha_1, \alpha_2, \ldots$: de aquí se deduce

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

razón que es holomorfa en todo el plano. Si además se tiene

$$\left|\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right| < M,$$

representando M un número finito, el teorema de Liouville nos demuestra que esta razón es una constante.

Teorema XIV.—*Una función monogena, que admite* m *valores para cada valor de su variable, se hace necesariamente infinita.*

Designemos por $u_1, u_2, \ldots u_m$ los valores que toma la función $u = f(z)$ para un cierto valor de z. Consideremos una función simétrica de estas m cantidades, por ejemplo, su suma

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m.$$

Cuando la variable z describe un contorno cerrado, los valores anteriores de la función se permutan unos por otros según una cierta ley, pero la función simétrica no altera. Esta función es, por tanto, monodroma, y como debe hacerse infinita (teor. I), es necesario que uno de los términos de la suma sea infinito.

TEOREMA XV.—*Una función monogena, que tiene* m *valores para cada valor de la variable, y que no admite más que un número limitado de infinitos, es raíz de una ecuación algébrica.*

Representemos como antes por $u_1, u_2 \ldots u_m$ los m valores de $u = f(z)$, y consideremos las funciones simétricas

$$\Sigma u_h, \quad \Sigma u_h u_k, \quad \Sigma u_h u_k u_l, \ldots \qquad u_1 u_2 \ldots u_m;$$

cada una de estas funciones es monodroma y no tiene más que un número limitado de infinitos, luego es una fracción racional en z. La función u satisface, por consiguiente, á una ecuación algébrica del grado m, cuyos coeficientes son fracciones racionales en z. Además, esta ecuación es irreducible, porque si la función u satisfaciera á una ecuación de grado inferior, no podría tener m valores.

Corolario.—Una función definida por una ecuación algébrica irreducible del grado m, *toma* m *valores para cada valor de la variable.*

CAPÍTULO X

Series de Lagrange, Fourier y Burmann.

63. Serie de Lagrange.—*Si* f(z) *y* φ(z) *son dos funciones holomorfas en el interior de un contorno* L; x *es un punto interior á este contorno, y* α *una constante suficientemente pequeña para que la condición*

$$\left|\frac{\alpha f(z)}{z-x}\right| < 1,$$

esté satisfecha para todos los puntos del contorno L: *vamos á demostrar que la ecuación*

$$z - x - \alpha . f(z) = 0, \qquad (1)$$

admite una raíz única a *en el interior del contorno, y que* φ(a) *estará dada por la serie convergente* (*)

$$\varphi(a) = \varphi(x) + \alpha f(x) . \varphi'(x) + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [f(x)^n . \varphi'(x)] + \ldots \qquad (2)$$

(*) Esta serie la dió á conocer Lagrange en una Memoria presentada á la Academia de Ciencias de Berlín con el título: *Nouvelle méthode pour résoudre les équations litérales par le moyen des séries*, 1770. Esta Memoria está reproducida en el tomo III de las *Œuvres de Lagrange*. París, 1869.

Para demostrar esta proposición, consideremos la integral

$$I = \int_L \frac{\psi(z)}{z - x - \alpha f(z)}\, dz,$$

en la cual $\psi(z)$ es una función cualquiera, pero continua y monodroma en el interior del contorno L. Por las hipótesis admitidas, se tiene

$$\frac{1}{z - x - \alpha f(z)} = \frac{1}{z - x} + \frac{\alpha f(z)}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{\alpha^n . f(z)^n}{(z-x)^{n+1}} + R, \quad (3)$$

designando por R la expresión

$$R = \frac{\alpha^{n+1} f(z)^{n+1}}{(z-x)^{n+1}\,[z - x - \alpha f(z)]} = \frac{\alpha^{n+1} f(z)^{n+1}}{(z-x)^{n+2}\left[1 - \dfrac{\alpha f(z)}{z-x}\right]}.$$

Multiplicando por $\psi(z)dz$ los dos miembros de la expresión (3) é integrando á lo largo de L, se obtiene

$$I = \int_L \frac{\psi(z)\,dz}{(z-x)} + \int_L \frac{\alpha f(z) . \psi(z)\,dz}{(z-x)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \int_L \frac{\alpha^n f(z)^n . \psi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} + \int_L R . \psi(z)\,dz,$$

y en virtud de la fórmula

$$\int_L \frac{F(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} F^{(n)}(x)$$

(n.° 50, teor. IV), se obtiene finalmente

$$I = 2\pi i \left\{ \psi(x) + \frac{\alpha}{1!} \cdot \frac{d}{dx}[f(x) . \psi(x)] + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[f(x)^n . \psi(x)] \right\} +$$

$$\int_L R\psi(z)\,dz. \quad (4)$$

Si n crece indefinidamente, la serie (4) es convergente porque el módulo de $\int_L R\psi(z)dz$ tiende hacia cero; en efecto, si M es el valor máximo del módulo de $\dfrac{\psi(z)}{z-x}$, y μ el de $\left|\dfrac{\alpha f(z)}{z-x}\right|$ á lo largo de L, se tiene

$$\text{mód.} \int_L R\psi(z)dz \leq \int_L M \cdot \frac{\mu^{n+1}}{1-\mu}\, ds \leq M \frac{\mu^{n+1}}{1-\mu} \cdot s, \quad (5)$$

designando por s la longitud del contorno; pero como $\mu < 1$, la expresión (5) tiende hacia cero para $n = \infty$.

Hagamos en particular $\psi(z) = \varphi(z) - \alpha\varphi(z) f'(z)$, de donde $\psi(x) = \varphi(x) - \alpha\varphi(x) . f'(x)$, y sustituyendo en la expresión (4) se obtendrá

$$\frac{1}{2\pi i} I = \varphi(x) - \alpha\varphi(x) . f'(x) + \frac{\alpha}{1!} \cdot \frac{d}{dx}\left\{\varphi(x) . f(x) - \alpha\varphi(x) . f(x) . f'(x)\right\} +$$

$$\frac{\alpha^2}{2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left\{\varphi(x) . f(x)^2 - \alpha\varphi(x) . f(x)^2 . f'(x)\right\} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left\{\varphi(x) . f(x)^n - \alpha . \varphi(x) . f(x)^n . f'(x)\right\} + \ldots$$

Ahora bien, el coeficiente de α^n en esta expresión es evidentemente

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} f(x)^n . \varphi(x) - \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \varphi(x) . f(x)^{n-1} . f'(x) =$$

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{n f(x)^{n-1} . f'(x) . \varphi(x) + f(x)^n . \varphi'(x) - n . \varphi(x) . f(x)^{n-1} f'(x\right.$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{f(x)^n . \varphi'(x)\right\};$$

luego se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} I = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(z) - \alpha\varphi(z)f'(z)}{z - x - \alpha f(z)} dz = \varphi(x) + \frac{\alpha}{1!}[f(x) . \varphi'(x)] + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f(x)^n . \varphi'(x)] + \dots \qquad (6)$$

La fórmula (6) es verdadera, cualquiera que sea $\varphi(x)$, siempre que sea continua y monodroma; luego se podrá hacer $\varphi(z) = \varphi(x) = 1$, y, por tanto, $\varphi'(x) = 0$, llevando esta hipótesis á la fórmula nos da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1 - \alpha . f'(z)}{z - x - \alpha f(z)} dz = 1; \qquad (7)$$

y como $1 - \alpha f'(z)$ es la derivada de $z - x - \alpha f(z)$, el primer miembro de esta ecuación representa, según sabemos (número 62), el número de raíces de la ecuación

$$z - x - \alpha f(z) = 0$$

contenidas en el interior del contorno L; luego queda demostrado que no existe más que una. Para demostrar la segunda parte de la proposición, será suficiente probar que si designamos por a esta raíz, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(z) . \frac{1 - \alpha f'(z)}{z - x - \alpha f(z)} dz = \varphi(a).$$

Para conseguirlo, observemos que, siendo a el único polo de la función que hay que integrar, esta integral será igual al residuo de la función para $z = a$, y este residuo es fácil de determinar. En efecto, por las hipótesis hechas, se tiene

$$\varphi(z) = \varphi(a) + (z - a)\varphi'(a) + \dots, \qquad (8)$$

y como, por otra parte, $\dfrac{1-\alpha f'(z)}{z-x-\alpha f(z)}$ tiene por residuo 1 (fórmula 7), su desarrollo en serie será de la forma

$$\frac{1-\alpha f'(z)}{z-x-\alpha f(z)}=\frac{1}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+\ldots; \quad (9)$$

multiplicando las dos expresiones (8) y (9), su producto será de la forma

$$\frac{\varphi(a)}{z-a}+B_0+B_1(z-a)+\ldots,$$

y su residuo será $\varphi(a)$; luego queda demostrada la proposición y obtenida la serie de Lagrange.

Aplicación.—Como ejemplo se puede tomar la ecuación del problema de Keplero

$$u=T+e.\text{sen}.u,$$

en la cual T representa la anomalía media de un planeta, u la anomalía excéntrica y e la excentricidad de su órbita. Haciendo en la fórmula (2)

$$z=u,\quad \alpha=e,\quad f(z)=\text{sen}.u,\quad x=T,\quad \varphi(z)=u,$$

se obtiene

$$u=T+\frac{e}{1!}\text{sen}.T+\frac{e^2}{2!}D.\text{sen}.^2T+\ldots+\frac{e^n}{n!}D^{(n-1)}.\text{sen}.^nT+\ldots;$$

y reemplazando las potencias de *sen. T* por sus valores, y verificando operaciones, se tiene

$$=T+e.\text{sen}.T+\frac{e^2}{2!}\text{sen}.2T+\frac{e^3}{3!}\cdot\frac{1}{2^2}[3^2.\text{sen}.3T-3\,\text{sen}.T]+$$

$$\frac{e^4}{4!}\cdot\frac{1}{2^3}[4^3.\text{sen}.4T-4.2^3\text{sen}.2T]+\ldots$$

64. Serie de Fourier.—*Si en la parte de plano comprendido entre dos rectas paralelas, una función es holomorfa y admite un período ω, cuyo argumento es igual al de las rectas, esta función es desarrollable en una serie ordenada según las potencias enteras, positivas y negativas, de* $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$*, y convergente en esta banda.*

En efecto, hagamos

$$e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} = t, \quad t = re^{\theta i}, \quad \text{ó sea} \quad e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} = re^{\theta i},$$

se tiene inmediatamente

$$z = \frac{\omega . lr}{2\pi i} + \frac{\omega\theta}{2\pi} = -\frac{i\omega . lr}{2\pi} + \frac{\omega\theta}{2\pi}.$$

Si hacemos variar θ de 0 á 2π, es decir, si t describe una circunferencia (fig. 19) que tenga por centro el origen, la variable z describe una recta AA' limitada cuyos extremos corresponden á los valores

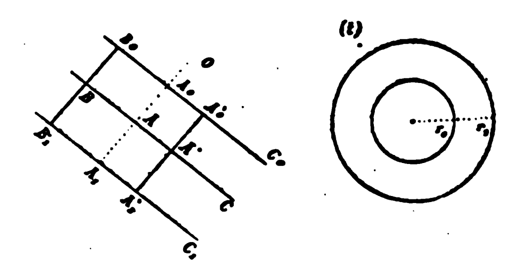


Fig. 19.

$$z = -\frac{i\omega . lr}{2\pi}, \qquad z = -\frac{i\omega . lr}{2\pi} + \omega.$$

Si θ varía en seguida de 2π á 4π, es decir, si t describe otra vez la misma circunferencia, la variable z describe una segunda recta $A'A''$ de longitud igual á AA' y colocada sobre su prolongación; y así continuaríamos: estos segmentos de recta forman la recta indefinida BC. Supongamos ahora que r varía de r_0 á r_1; el punto A describirá sobre la recta perpendicular á BC, trazada desde el origen un segmento A_0A_1, cuyos extremos corresponden á los valores

$$z = -\frac{i\omega \,.\, lr_0}{2\pi}, \qquad z = -\frac{i\omega \,.\, lr_1}{2\pi},$$

y la recta BC, moviéndose paralelamente á sí misma, irá de la posición B_0C_0 á la B_1C_1. Así que, á la parte del plano (t), comprendida en la corona r_0r_1, corresponderá la parte del plano (z) comprendido en la banda $B_0C_0B_1C_1$.

Sea $u=f(z)$ una función de z holomorfa en la banda $B_0C_0B_1C_1$, y que admite el período ω, es decir, tal que $f(z+\omega)=f(z)$. Si concebimos la banda dividida en rectángulos iguales al $A_0A'_0A_1A'_1$, la función tomará los mismos valores en los puntos homólogos de estos diversos rectángulos. Á un valor de t corresponden una infinidad de valores de z de la forma $z+m\omega$, siendo m un número entero positivo ó negativo, y, por consiguiente, un solo valor de u; por tanto, $u=f(z)$ puede mirarse como una función holomorfa de t en la corona comprendida entre las circunferencias r_0 y r_1; luego en virtud del teorema de Laurent, se tendrá

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n t^n, \tag{1}$$

serie ordenada según las potencias enteras, positivas y negativas, de t, y convergente en la corona r_0r_1, reemplazando t por su valor, se tiene

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \,.\, e^{\frac{2n\pi z i}{\omega}}, \tag{2}$$

serie convergente en la banda $B_0 C_0 B_1 C_1$. Los coeficientes de las series (1) y (2) están dados por la fórmula

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int u.t^{-(n+1)}.dt,$$

integral relativa á una circunferencia intermedia entre las r_0 y r_1; cambiando de variable, se tiene

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int u.e^{-(n+1)\frac{2\pi zi}{\omega}}.e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}.\frac{2\pi i}{\omega}dz =$$

$$\frac{1}{\omega}\int u.e^{-\frac{2n\pi zi}{\omega}}.dz.$$

Sustituyendo este valor en la serie (2), reemplazando la variable de integración por α para evitar confusiones y observando que á la integral á lo largo de una circunferencia de la corona corresponde la integral á lo largo de una recta l de longitud ω, se tiene

$$u = f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\int_l u_\alpha.e^{-\frac{2n\pi\alpha i}{\omega}}.d\alpha.e^{\frac{2n\pi zi}{\omega}} =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\int_l f(\alpha).d\alpha.e^{\frac{2n\pi i}{\omega}(z-\alpha)}.$$

Reemplazando en esta expresión las exponenciales por senos y cosenos, se obtiene

$$(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\int_l f(\alpha).d\alpha\left[\cos.\frac{2n\pi}{\omega}(z-\alpha) + i.\text{sen}.\frac{2n\pi}{\omega}(z-\alpha)\right],$$

expresión que desarrollada nos da

$$f(z) = \frac{1}{\omega}\int_l f(\alpha)d\alpha \left[\dots + \left\{ \cos.\frac{2\pi}{\omega}(z-\alpha) - i\,\text{sen.}\frac{2\pi}{\omega}(z-\alpha) \right\} \right.$$

$$\left. + 1 + \left\{ \cos.\frac{2\pi}{\omega}(z-\alpha) + i\,\text{sen.}\frac{2\pi}{\omega}(z-\alpha) \right\} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{\omega}\int_l f(\alpha).d\alpha \left[1 + 2\cos.\frac{2\pi}{\omega}(z-\alpha) + 2\cos.\frac{2.2\pi}{\omega}(z-\alpha) + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_l f(\alpha)d\alpha \left[1 + 2\sum_1^\infty \cos.\frac{2n\pi}{\omega}(z-\alpha) \right],$$

que es una de las series de Fourier.

65. Serie de Burmann.—Supongamos que la función $\theta(z)$ es holomorfa en el interior de un contorno cerrado C, y que no tiene más que una raíz en el interior de este contorno: sea x un número poco diferente de esta raíz, es decir, supongamos que $\theta(x)$ no tiene un módulo muy grande, se podrá suponer que á lo largo de este contorno la condición

$$| \theta(z) | > | \theta(x) |, \qquad (1)$$

queda siempre satisfecha; en resumen, que suponemos: 1.°, en el interior del contorno C, $\theta(z)$ es holomorfa; 2.°, no tiene en el interior de C más que un solo cero; 3.°, estando x en el interior de C, la desigualdad (1) se verifica para todos los valores de z situados sobre este contorno. Y vamos á demostrar, que si $f(z)$ es una función holomorfa en el interior de C, se la podrá desarrollar en una serie ordenada según las potencias ascendentes de $\theta(x)$.

En efecto, sea N el número de raíces de la ecuación

$$\theta(z) - \theta(x) = 0,$$

contenidas en el contorno C, una de las cuales es x, se

tendrá

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\theta'(z)dz}{\theta(z)-\theta(x)};$$

pero en virtud de la desigualdad (1) esta integral se podrá desarrollar como sigue

$$N = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_C \frac{\theta'(z)dz}{\theta(z)} + \int_C \frac{\theta'(z).\theta(x)dz}{\theta(z)^2} + \dots\right].$$

Un término cualquiera del segundo miembro, á excepción del primero, es de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\theta'(z).\theta(x)^{n-1}dz}{\theta(z)^n} = \frac{\theta(x)^{n-1}}{2\pi i}\int_C \theta(z)^{-n}.\theta'(z)dz =$$
$$\frac{\theta(x)^{n-1}}{2\pi i}\left[\frac{1}{-(n-1)\theta(z)^{n-1}}\right]_C = 0;$$

y como el primero expresa el número de raíces de $\theta(z) = 0$ contenidas en el interior del contorno C, se tiene $N = 1$; luego

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\theta'(z)dz}{\theta(z)}.$$

En virtud de un teorema de Cauchy (n.° 62), se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\theta'(z)dz}{\theta(z)-\theta(x)}. \qquad (2)$$

Si en el interior del contorno C, $\theta(z) = 0$ tuviese α raíces, la ecuación $\theta(z) - \theta(x) = 0$ tendría también α, y si las designásemos por $x_1, x_2, x_3, \dots$, el primer miembro de la expresión (2) sería, según el teorema citado,

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots$$

Esto sentado, puesto que se supone que á lo largo del contorno C se verifica la igualdad (1), la integral (2) se podrá

desarrollar en serie como sigue

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_C \frac{f(z)\theta'(z)dz}{\theta(z)}+\theta(x)\int_C \frac{f(z)\theta'(z)dz}{\theta(z)^2}+\dots+\right.$$
$$\left.\theta(x)^n\int_C \frac{f(z)\theta'(z)dz}{\theta(z)^{n+1}}+R\right]. \qquad (3)$$

Tomando una cualquiera de las integrales, é integrando por partes, se tiene

$$\int \frac{f(z)\theta'(z)dz}{\theta(z)^{n+1}}=-\frac{f(z)}{n\theta(z)^n}+\frac{1}{n}\int \frac{f'(z)dz}{\theta(z)^n},$$

si hacemos $\theta(z)=(z-a)\Theta(z)$, se tiene, llamando a la raíz de $\theta(z)$ contenida en C,

$$\int \frac{f(z)\theta'(z)dz}{\theta(z)^{n+1}}=-\frac{f(z)}{n\theta(z)^n}+\frac{1}{n}\int \frac{f'(z)dz}{(z-a)^n\Theta(z)^n},$$

é integrando á lo largo del contorno C el primer término se anula, y el segundo es el residuo de la función $\frac{f'(z)}{(z-a)^n\Theta(z)^n}$ para $z=a$, ó sea

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\theta'(z)dz}{\theta(z)^{n+1}}=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta(a)^n}\right],$$

y, por consiguiente, la expresión (3) se convierte en

$$f(x)=f(a)+\theta(x)\frac{f'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\theta(x)^2}{2!}\cdot\frac{d}{da}\left[\frac{f'(a)}{\Theta(a)^2}\right]+\dots+$$
$$\frac{\theta(x)^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta(a)^n}\right]+\dots \qquad (4)$$

que es la serie de Burmann (*).

(*) El distinguido matemático portugués Dr. Gomes Teixeira ha dado una muy útil é interesante generalización de la serie de Burmann. Véase *Teixeira* (11), páginas 90 y siguientes.

Nota I.—El resto R tiene la forma

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\theta'(z)}{\theta(z)-\theta(x)} \cdot \frac{\theta(x)^{n+1}}{\theta(z)^{n+1}}\,dz;$$

si llamamos M el valor máximo del módulo de $\frac{f(z)\theta'(z)}{\theta(z)-\theta(x)}$, y μ al de la fracción $\frac{\theta(x)}{\theta(z)} < 1$, se tiene, designando por s la longitud del contorno C,

$$|R| \leq \frac{1}{2\pi}\int_C M\mu^{n+1}\,.\,ds \leq \frac{M\mu^{n+1}s}{2\pi},$$

cantidad que tiende hacia cero al crecer n indefinidamente.

Nota II.—La fórmula de Burmann contiene como caso particular la de Taylor. En efecto, haciendo en ella $\theta(z) = z - a$, ó sea, $\Theta(z) = 1$, y tomando como contorno de integración una circunferencia de radio r y centro a, la fórmula (4) se convierte en

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots +$$

$$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

Nota III.—Si en la fórmula de Burmann se hace

$$\theta(z) = \frac{z-a}{\varphi(z)},$$

se obtiene

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{\varphi(x)}\,.\,f'(a)\varphi(a) +$$

$$\frac{1}{2!}\cdot\frac{(x-a)^2}{\varphi(x)^2}\cdot\frac{d}{da}[f'(a)\varphi(a)^2] + \ldots,$$

y en esta se hace $\frac{x-a}{\varphi(x)}=\alpha$, se halla

$$f(x)=f(a)+\alpha f'(a)\varphi(a)+\frac{\alpha^2}{2!}\cdot\frac{d}{da}[f'(a)\varphi(a)^2]+\dots,$$

que es la fórmula de Lagrange estudiada en un párrafo anterior (n.° 63).

Ejemplo.—Desarrollar e^{ax} por las potencias de xe^{bx}, siendo a y b dos constantes. Haciendo

$$\theta(x)=xe^{bx},\quad f(z)=e^{az},\quad a=0,\quad \Theta(z)=\frac{\theta(z)}{z}=e^{bx},$$

se obtiene inmediatamente

$$f(x)=e^{ax}=1+axe^{bx}+a(a-2b)\frac{x^2}{2!}e^{2bx}+a(a-3b)\frac{x^3}{3!}e^{3bx}+\dots$$

CAPÍTULO XI

Puntos críticos esenciales.

66. Preliminar.—En la imposibilidad de reasumir en pocas páginas la teoría dada por Weierstrass de las funciones á que dió el nombre de ***trascendentes enteras***, que son las funciones uniformes y monogenas que no son holomorfas ni meromorfas, vamos á agrupar en este capítulo algunas de sus más importantes propiedades, remitiendo al lector, para el estudio de esta teoría, á las obras de Bianchi y Pincherle, y muy especialmente á la de Forsyth, en las que la materia está tratada magistralmente.

67. Funciones regulares.—Hemos dicho anteriormente (n.º 63) que una función $f(z)$ se dice que es *regular* en el dominio del punto z_0, si puede desarrollarse en serie convergente ordenada por las potencias positivas del binomio $z - z_0$, serie de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

Las funciones regulares poseen algunas interesantes propiedades, de las cuales vamos á necesitar las que siguen.

TEOREMA I.—*La suma, ó diferencia, de dos funciones uniformes, regulares en todos los puntos de un área* A, *es una función regular en la misma área.*

Pues si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son las dos funciones dadas, de

$$f(z) = \Sigma a_n(z - \alpha)^n, \qquad \varphi(z) = \Sigma b_n(z - \alpha)^n,$$

se deduce

$$f(z) \pm \varphi(z) = \Sigma(a_n \pm b_n)(z-\alpha)^n.$$

TEOREMA II.—*El producto de dos funciones uniformes, regulares en todos los puntos de un área* A, *es una función regular en la misma área.*

Demostración análoga á la del teorema anterior.

TEOREMA III.—*El cociente de dos funciones uniformes, regulares en todos los puntos de un área* A, *es regular en los puntos de esta área en que el denominador no se anula.*

En efecto, suponiendo que $\varphi(z)$ es la función denominador, y haciendo

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z-\alpha) + \ldots,$$

en la que b_0 se supone distinto de cero, se tiene

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{b_0}\left[1 + \frac{b_1(z-\alpha) + b_2(z-\alpha)^2 + \ldots}{b_0}\right]^{-1} =$$

$$\frac{1}{b_0}[1 + P_0(z-\alpha)]^{-1},$$

haciendo

$$P_0(z-\alpha) = \frac{(z-\alpha)[b_1 + b_2(z-\alpha) + \ldots]}{b_0}.$$

Dando á $|z-\alpha|$ un valor suficientemente pequeño para que $|P_0(z-\alpha)| < 1$, podremos desarrollar $[\varphi(z)]^{-1}$ en serie ordenada según las potencias de $z-\alpha$, y tendremos

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{b_0}\left\{1 - P_0(z-\alpha) + [P_0(z-\alpha)]^2 \ldots\right\},$$

serie uniformemente convergente en los alrededores de α, lo mismo que las series que resultan de $P_0(z-\alpha)$, $[P_0(z-\alpha)]^2$, etcétera; luego la función $[\varphi(z)]^{-1}$ es susceptible de desarrollarse en serie ordenada según las potencias de $z-\alpha$, y es

regular en el dominio de este punto, y lo mismo le ocurrirá á

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = f(z) \cdot [\varphi(z)]^{-1} .$$

68. Factores primarios.—Las trascendentes enteras desempeñan en la teoría general de funciones un papel análogo al de los polinomios racionales enteros en la parte elemental del estudio de las funciones; y así como un polinomio entero del grado m puede descomponerse en el producto de una constante por los m binomios de la forma $x - a$ que se obtienen restando de la variable los valores que le reducen á cero, en la teoría de funciones se ha tratado de realizar una descomposición semejante que pusiese en evidencia los ceros de la función, llegando Weierstrass á tratar el problema en toda su generalidad, después de estudiar Cauchy algunos casos especiales, y consiguiendo demostrar que toda trascendente entera que admite una infinidad de raíces, puede expresarse por el producto de un número infinito de factores, cada uno de los cuales no se hace cero más que para un solo valor de la variable.

La primera dificultad de la cuestión planteada estriba en encontrar la forma conveniente de cada uno de los elementos de un producto de infinitos factores que satisfagan á las dos condiciones siguientes: 1.ª Que cada factor se anule para un valor, y solo uno, de la variable. 2.ª Que el producto formado con esos factores sea absoluta y uniformemente convergente para valores convenientes de la variable, con el fin de que pueda representar una función perfectamente definida (*).

Para conseguir la formación de estos factores podemos observar que la función exponencial e^z no se anula para ningún valor finito de la variable, y que lo mismo le ocurre á la $e^{g(z)}$, en la que $g(z)$ representa un polinomio ó función en-

(*) Véase al fin la *Nota* sobre los productos de infinitos factores.

tera de z. Y, recíprocamente, toda función entera que no se anula para ningún valor de z, es de la forma $e^{g(z)}$: en efecto, si $F(z)$ representa una función entera de z que no se anula para ningún valor de z, un valor cualquiera $z = a$ es un punto ordinario de la función $\frac{F'(z)}{F(z)}$, cociente que será, por esta causa, otra función entera de z, $g_1(z)$, por ejemplo, haciendo

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = g_1(z).$$

Multiplicando la expresión anterior por dz é integrando entre los límites z_0 y z, se tiene

$$l\left[\frac{F(z)}{F(z_0)}\right] = \int_{z_0}^{z} g_1(z)\,dz = g(z) - g(z_0),$$

representando por $g(z)$ una nueva función entera tal que $g'(z) = g_1(z)$: de aquí se deduce

$$\frac{F(z)}{F(z_0)} = e^{g(z) - g(z_0)}, \quad \text{ó sea} \quad F(z) = e^{g(z) - g(z_0) + l.F(z_0)} = e^{Q(z)},$$

si se hace

$$Q(z) = g(z) - g(z_0) + l.F(z_0).$$

Hecha esta observación, es evidente, que si una función entera se anula para un número finito de valores de su variable $a_1, a_2, \ldots a_n$, será de la forma

$$(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n).e^{Q(z)}:$$

si el número de valores que la anulan es infinito, su forma la da el siguiente:

Teorema de Weierstrass.—*Dada la serie de cantidades* $0, a_1, a_2, \ldots$ *colocadas según el orden creciente de sus módulos,*

y que satisfacen á la condición

$$\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty,$$

se puede formar una función trascendente entera por la fórmula

$$f(z) = z^{n_0}. \prod_{c=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{n_c}. e^{n_c . S_c}, \qquad S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k, \quad (1)$$

cuyas raíces son 0, a_1, a_2, ... *y cuyos grados de multiplicidad respectivos son* n_0, n_1, n_2, ...

Y, recíprocamente, si $f_1(z)$ *es una función entera cuyas raíces son* 0, a_1, a_2, ... *con los grados de multiplicidad* n_0, n_1, n_2, ... *esta función puede descomponerse en factores que hacen explícitas estas raíces, por medio de la formula*

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)}. z^{n_0}. \prod_{c=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{n_c}. e^{n_c . S_c}, \qquad (2)$$

en la que $\varphi(z)$ *representa una función entera* (*).

Demostración de Mittag-Leffler.—De la serie

$$l\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = -n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

convergente si $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$, se deduce

$$\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{-n_c . S_c(1,\infty)}, \qquad (3)$$

(*) Tanto este teorema como el de Mittag-Leffler están tomados de las obras *Galdeano* (9) y *Teixeira* (10).

escribiendo por abreviar

$$S_c(u, v) = \sum_{k=u}^{v} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k.$$

De la expresión (3) se deduce

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} . e^{n_c \cdot S_c(1, m_c)} = e^{-n_c \cdot S_c(m_c + 1, \infty)}, \qquad (4)$$

en la que m_c representa un número entero ó cero, debiendo en este caso tenerse $e^{n_c \cdot S_c(1, m_c)} = 1$.

Consideremos ahora una serie de cantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tales que $\sum_1^\infty \varepsilon_c$ sea convergente, y demos á m_c un valor suficientemente grande para que se tenga

$$n_c \left| S_c(m_c + 1, \infty) \right| < \varepsilon_c, \qquad (5)$$

para cualquier valor que se dé á z que satisfaga á la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, lo que siempre es posible, por ser en este caso uniformemente convergente la serie $S_c(1, \infty)$. El producto ΠE_c, en el que

$$E_c = \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} . e^{n_c \cdot S(1, m_c)}$$

representa una función regular en todos los puntos del plano, que se anula en los puntos $a_1, a_2, \ldots$ En efecto, consideremos un punto cualquiera del plano, z_0, y los puntos próximos á éste, es decir, los puntos que satisfagan á la condición $|z - z_0| \leq \rho$, siendo ρ un número tan pequeño como se quiera. Por ser $\lim_{c=\infty} a_c = \infty$, es siempre posible dar á c un valor c_1 suficientemente grande para que la desigualdad $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$ quede satisfecha por todos los valores de c mayo-

res que c_1, y por todos los de z que satisfagan á la condición

$$| z - z_0 | \leq \rho.$$

Además, por ser convergente la serie $\sum_1^\infty \varepsilon_c$, es siempre posible dar á c un valor c_2 suficientemente grande, y á δ un valor bastante pequeño para que la desigualdad

$$\sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

quede satisfecha para todos los valores de c superiores á c_2 cualquiera que sea p. Dedúcese de aquí que las dos desigualdades precedentes quedan satisfechas al mismo tiempo por los valores de c mayores que la mayor de las cantidades c_1 y c_2 en la región del plano determinada por la condición

$$| z - z_0 | \leq \rho.$$

De las desigualdades precedentes, y de la (5), resulta que la

$$\sum_{t=c}^{c+p} | n_c S_t(m_t + 1, \infty) | < \delta \tag{6}$$

queda satisfecha para todos los valores de c superiores á c_1 y c_2, en la región del plano determinada por la condición $| z - z_0 | \leq \rho$.

Por otra parte, la fórmula (4) da

$$\prod_{t=c}^{c+p} E_t = e^{-\sum_{t=c}^{c+p} n_t . S_t(m_t + 1, \infty)},$$

de la que resulta

$$\sum_{t=c}^{c+p} l . E_t = - \sum_{t=c}^{c+p} n_t . S_t(m_t + 1, \infty),$$

y en virtud de la desigualdad (6)

$$\left| \sum_{l=c}^{c+p} l.E_l \right| < \delta,$$

luego la serie $\sum_{l=1}^{\infty} l.E_l$ es uniformemente convergente en la región considerada del plano.

Esto sentado, supongamos primero que z_0 es diferente de a_c, y que se da á ρ un valor suficientemente pequeño para que $| z - z_0 | < | z - a_c |$. El segundo miembro de la igualdad

$$l.E_c = n_c.l\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n_c.\sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k =$$

$$n_c.l\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right) + n_c l\left(1 - \frac{z_0}{a_c}\right) +$$

$$n_c.\sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c}\right)^k$$

es susceptible de ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de $z - z_0$, y tendremos, empleando una notación conocida (n.° 64), $l.E_c = P(z - z_0)$. Si aplicamos un conocido teorema, tendremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} l.E_c = P_1(z - z_0),$$

y, por consiguiente,

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1(z-z_0)}.$$

De esta fórmula se deduce inmediatamente

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \dots + \frac{P_1{}^n(z - z_0)}{n!} + \dots = P_2(z - z_0),$$

lo que prueba que la función $\prod_{c=1}^{\infty} E_c$ es regular en el punto z_0, como se quería demostrar.

Supongamos ahora que z_0 representa una raíz a_r de la función que queremos formar. Dando, en este caso, á ρ un valor suficientemente pequeño para que en el área plana determinada por la condición $| z - a_r | \leq \rho$ no exista otra raíz de la función considerada, se tendrá

$$\frac{\prod_1^{\infty} E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_r}\right)^{n_r}} = e^{P_3(z - a_r)},$$

puesto que el primer miembro no tiene la raíz a_r, y, por tanto,

$$\prod_1^{\infty} E_c = \frac{(-1)^{n_r}}{a_r} (z - a_r)^{n_r} . e^{P_3(z - a_r)},$$

de donde resulta, como en el caso anterior, que la función $\prod_1^{\infty} E_c$ es regular en el punto a_r.

Las raíces a_1, a_2, ... de la función que estamos formando son todas diferentes de cero; para que la función tenga también la raíz 0, basta multiplicar $\prod_1^{\infty} E_c$ por z^{n_0}. En efecto, tenemos

$$z^{n_0} \prod_1^{\infty} E_c = (z_0 + z - z_0)^{n_0} . P_3(z - z_0) = P_4(z - z_0),$$

y, por tanto, la nueva función es también regular en todo el plano.

De todo lo que precede se deduce la primera parte del teorema de Weierstrass, es decir, que se puede construir, mediante la fórmula (1), una función que sea regular en todo el plano y que se anula en los puntos 0, a_1, a_2, ...

Para demostrar la segunda parte del teorema, es suficiente observar que el cociente de la función dada $f_1(z)$ por la $f(z)$ que acabamos de formar, no puede ser nulo ni infinito en ningún punto del plano, luego este cociente es una función $F(z)$ regular en todo el plano, y que no se anula en ningún punto, luego es de la forma

$$F(z) = e^{\varphi(z)},$$

siendo $\varphi(z)$ una función entera; lo que demuestra el teorema.

Nota I.—Weierstrass designaba con el nombre de *factores primarios* de una función á cada uno de los factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) e^{n_c \cdot S_c}$$

que figuran en las fórmulas (1) y (2).

Nota II.—Tanto para la descomposición en factores primarios de una función dada, como para formar una función entera que tenga por raíces números dados, es preciso conocer, para cada valor de c, un valor de m_c que satisfaga á la desigualdad

$$n_c \mid S_c(m_c + 1, \infty) \mid < \varepsilon_c,$$

y para ello basta, como vamos á ver, el dar á m_c valores tales que hagan convergente la serie

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c \cdot z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|. \qquad (7)$$

En efecto, si esta serie es convergente, podemos dar á ε_c el valor

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c \cdot z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|, \qquad (8)$$

designando λ una cantidad independiente de z y de c. Pero

por ser

$$n_e \left| \sum_{h=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z}{a_e} \right)^h \right| < \sum_{h=m+1}^{\infty} n_e \left| \frac{z}{a_e} \right|^h$$

y

$$\sum_{h=m_e+1}^{\infty} n_e \left| \frac{z}{a_e} \right|^h = \left| \frac{n_e \cdot z^{m_e+1}}{a_e^{m_e+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_e} \right|},$$

la desigualdad (b) puede sustituirse por la

$$\left| \frac{n_e \cdot z^{m_e+1}}{a^{m_e+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_e} \right|} < \varepsilon_e$$

que queda verificada, puesto que se le puede dar á λ el valor $\frac{1}{1-\varepsilon}$, valor máximo que adquiere $\frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_e} \right|}$ cuando se verifica que $\frac{z}{a_e} < \varepsilon < 1$.

69. Funciones que tienen un solo punto crítico esencial.—Teorema I.—*Si el punto α es un punto crítico esencial de la funcion* f(z), *es tambien punto crítico esencial de la* $\frac{1}{f(z)}$.

En efecto, el punto α no puede ser un punto ordinario de $\frac{1}{f(z)}$ puesto que esta función no es continua para $z = \alpha$ (número 42); y tampoco puede ser un polo, pues entonces sería un cero de $f(z)$.

Teorema II.—*Si* f(z) *es una función continua, monodroma y monogena en el interior de un área, y tiene en el interior de ella el punto crítico esencial α, en los alrededores de este punto*

la función tiene la forma

$$f(z) = P(z - \alpha) + G\left(\frac{1}{z - \alpha}\right),$$

en la cual la función G *representa una serie convergente en todo punto del plano, á excepción del punto* $z = \alpha$, *y la función* P *es una función algébrica, ó si es trascendente, converge absoluta y uniformemente para valores suficientemente pequeños de* $|z - \alpha|$.

En efecto, desde el punto α como centro, describamos dos circunferencias contenidas por completo en el área propuesta; una, la interior, con radio suficientemente pequeño para que, en el círculo que limite, no exista más punto crítico de la función propuesta que el $z = \alpha$, y la otra, la exterior, con radio tal que no satisfaga á más condición que á la de estar contenida por completo en el área dada.

Si z es un punto cualquiera de la corona circular comprendida entre las circunferencias trazadas, y contenido, por lo tanto, en la región de continuidad de la función, el teorema de Laurent (n.° 57) nos dará la siguiente serie

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \dots \\ + b_1(z - \alpha)^{-1} + b_2(z - \alpha)^{-2} + \dots, \end{aligned}$$

cuyos coeficientes están determinados por las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z')}{(z' - \alpha)^{n+1}}\,dz', \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int (z' - \alpha)^{n-1} . f(z') . dz',$$

tomando las integrales á lo largo de una circunferencia contenida en la corona, y designando por z' un punto de esta circunferencia.

La serie de potencias positivas de $z - \alpha$ es convergente en cualquier punto del interior de la circunferencia exterior de centro α, y puede representarse por la forma $P(z - \alpha)$,

siendo P una función algébrica ó trascendente. La serie de potencias negativas de $z - \alpha$ es convergente en todo punto exterior á la circunferencia interior trazada desde α, y contiene un número infinito de términos, pues si α fuera un polo, el desarrollo sería una fracción racional; puede, por tanto, esta parte representarse por la notación $G\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$, en la que G representa una serie convergente para todo punto del plano, excepto para $z = \alpha$, y que se anula si

$$|z - \alpha| = \infty.$$

Por consiguiente, se tiene

$$f(z) = P(z - \alpha) + G\left(\frac{1}{z-\alpha}\right),$$

como se quería demostrar.

Corolario I.—Si la función $f(z)$ tuviese algún otro punto crítico distinto del α, este punto crítico lo sería de la función $P(z - \alpha)$ prolongada fuera del círculo exterior; pero no puede serlo de $G\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$, pues esta función es una serie convergente en la parte de plano exterior al círculo interior de la corona.

Corolario II.—Si la función $f(z)$ no tiene en todo el plano más punto crítico esencial que el α, el círculo exterior puede tener su radio infinito, y en este caso todos los coeficientes a_1, a_2, ... son cero, y la función toma la forma

$$f(z) = a_0 + b_1(z - \alpha)^{-1} + b_2(z - \alpha)^{-2} + \dots,$$

y esta serie es convergente en cualquier punto exterior al círculo de radio muy pequeño trazado alrededor del punto α: la función puede representarse entonces bajo la forma

$$f(z) = G\left(\frac{1}{z-\alpha}\right).$$

TEOREMA III.—*Una función monodroma y monogena en el*

interior de un área, y que tiene en ella un punto crítico esencial aislado, adquiere en el dominio de este punto valores de módulo tan grande como se quiera; y también valores que difieran de una cantidad finita arbitraria, A, *en tan poco como queramos.*

Si la función $f(z)$ tiene en el área el punto crítico esencial $z = \alpha$, en los alrededores de este punto se tendrá

$$f(z) = P(z - \alpha) + G\left(\frac{1}{z - \alpha}\right),$$

y para valores de z muy próximos al α el término $P(z - \alpha)$ tiende hacia valores muy próximos al del término inicial de la serie; y como $G\left(\frac{1}{z - \alpha}\right)$ adquiere entonces valores de módulo tan grande como se quiera, la primera parte de la proposición enunciada queda demostrada. Para demostrar la segunda, consideremos la función

$$\frac{1}{f(z) - A}:$$

el punto $z = \alpha$ es también un punto crítico esencial aislado de esta función, á menos que en su dominio no se anule infinitas veces la diferencia $f(z) - A$. En este último caso la proposición queda demostrada, pues no sólo $| f(z) |$ diferirá de A en tan poco como queramos, sino que adquirirá realmente el valor de A. Si α es un punto crítico esencial aislado de $\frac{1}{f(z) - A}$, esta función debe tomar en su dominio valores de módulo tan grande como se quiera, ó lo que es igual, el módulo de $f(z)$ debe diferir de A en tan poco como queramos.

Nota.—Este teorema, que se debe á Weierstrass, ha sido precisado posteriormente por Picard.

70. Funciones con un número finito de puntos críticos esenciales.—Teorema.—*Una función monodroma y monogena que tiene en el plano un número finito de*

puntos críticos esenciales situados á distancia finita, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, *tiene la forma*

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_1^n G_r\left(\frac{1}{z - \alpha_r}\right),$$

en la cual $\varphi(z)$ *representa una función sin más punto crítico esencial que el* $z = \infty$, *si este lo es de* $f(z)$.

En efecto, puesto que α_1 es un punto crítico esencial de $f(z)$, en el dominio de este punto la función podrá ponerse bajo la forma

$$f(z) = f_1(z) + G_1\left(\frac{1}{z - \alpha_1}\right),$$

siendo $G_1\left(\frac{1}{z - \alpha_1}\right)$ una trascendente entera que se anula para $| z - \alpha_1 | = \infty$. La función $f_1(z)$ es regular en el punto $z = \alpha_1$, y tiene todos los demás puntos críticos esenciales de $f(z)$, por consiguiente, en los alrededores del punto α_2 podrá ponerse bajo la forma

$$f_1(z) = f_2(z) + G_2\left(\frac{1}{z - \alpha_2}\right),$$

siendo $G_2\left(\frac{1}{z - \alpha_2}\right)$ una trascendente entera que se anula para $| z - \alpha_2 | = \infty$, y $f_2(z)$ una función regular en los puntos α_1 y α_2, y que posee todas las restantes singularidades de la función propuesta. Procediendo sobre $f_2(z)$ de igual manera, y repitiendo el razonamiento cuantas veces sea preciso, se llegará á la forma

$$f(z) = G_1\left(\frac{1}{z - \alpha_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z - \alpha_2}\right) + \ldots +$$

$$G_n\left(\frac{1}{z - \alpha_n}\right) + \varphi(z) = \varphi(z) + \sum_1^n G_r\left(\frac{1}{z - \alpha_r}\right),$$

en la cual $\varphi(z)$ no tendrá más punto crítico esencial que el $z = \infty$, si éste existía en $f(z)$.

71. Funciones con un número no finito de puntos críticos.—Teorema de Mittag-Leffler.— *Dadas las cantidades* $a_1, a_2, \ldots a_c, \ldots$, *colocadas en el orden creciente de sus módulos, y que satisfacen á la condición*

$$\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty,$$

y dadas las funciones

$$G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \ldots G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right), \ldots$$

que son de la forma

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_1^m A_t\left(\frac{1}{z-a_c}\right)^t;$$

siempre es posible formar una función $f(z)$ *de la forma*

$$f(z) = \sum_1^\infty \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z) \right],$$

que sea regular en todos los puntos del plano diferentes de los $a_1, a_2, \ldots a_c, \ldots$, *y de la cual estos puntos sean polos ó puntos críticos esenciales.*

Y recíprocamente: toda función $f_1(z)$ *regular en todo el plano, excepto en los puntos* $a_1, a_2, \ldots a_c, \ldots$ *que son polos ó puntos críticos esenciales, puede reducirse á la forma*

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^\infty \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z) \right],$$

en la cual $\varphi(z)$ *representa una función entera de* z

En efecto, por ser uniformemente convergente la serie

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-1} + \frac{A_2}{a_c^2}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-2} + \cdots,$$

cuando z es diferente de a_c, y por ser cada término de esta serie susceptible de desarrollarse en serie ordenada según las potencias de z, cuando $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, se tendrá

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k. \qquad (1)$$

Consideremos ahora una serie de cantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_c, \ldots$ tales que la serie $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ sea convergente, y dése á m_c un valor suficientemente grande para que se tenga

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^{(c)}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k\right| < \varepsilon_c, \qquad (2)$$

para cualquier valor de z que satisfaga la condición

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1,$$

lo que siempre es posible por ser uniformemente convergente la serie (1) en la región del plano determinada por la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$.

La suma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z), \qquad F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

satisface á las condiciones del teorema, pues si z_0 es un punto diferentes de los $a_1, a_2, \ldots a_c, \ldots$, y ρ un número positivo tan pequeño como se quiera, por ser $\lim_{c=\infty}(a_c) = \infty$, y convergente la serie $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$, siempre será posible dar á c un va-

lor c_1 bastante grande para que las desigualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon, \qquad \sum_{t=0}^{c+p} \varepsilon_t < \delta,$$

queden satisfechas, al mismo tiempo, por todos los valores de c mayores que c_1, en la región determinada por la condición $| z - z_0 | \leqq \rho$, para cualquier valor de p; y de estas desigualdades y de la (2), se deduce que la

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \cdot A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_t}\right)^k \right| < \delta, \quad \text{ó sea} \quad \sum_{t=c}^{c+p} \left| F_t(z) \right| < \delta,$$

queda satisfecha por los valores de c mayores que c_1, en la región determinada por la condición $| z - z_0 | \leqq \rho$; luego la serie $\sum_{c=1}^{\infty} . F_c(z)$ es uniformemente convergente en la región de plano considerada

Esto sentado, como $z_0 \neq a_c$, supongamos que se da á ρ un valor suficientemente pequeño para que

$$| z - z_0 | < | z_0 - a_c | ,$$

el segundo miembro de la igualdad

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A_t}{z_0 - a_c} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-1}$$

es susceptible de ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de $z - z_0$ en la región de plano determinada por la condición $| z - z_0 | \leqq \rho$; luego lo mismo le ocurre á la función $F_c(z)$, y tenemos

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

La función $\sum_1^{\infty} F_c(z)$ es, pues, regular en el punto z_0. Consi-

deremos ahora un punto crítico a_r de la función que queremos formar; dando en este caso á ρ un valor suficientemente pequeño para que en la región determinada por la condición $| z - a_r | \leq \rho$ no exista ningún otro punto crítico de la función considerada, tenemos que

$$\sum_1^{\infty} F_c(z) - F_r(z) = P_1(z - a_r),$$

puesto que el primer miembro no tiene el punto crítico a_r, y, por tanto, que

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_r\left(\frac{1}{z - a_r}\right) + P_2(z - a_r);$$

luego a_r es un polo ó un punto crítico esencial de la función

$$\sum_1^{\infty} F_c(z).$$

Los puntos críticos $a_1, a_2, \dots a_c, \dots$ de la función que hemos formado son diferentes de cero. Para que *cero* sea un punto crítico de esta función, de modo que en su dominio se tenga

$$f(z) = P_2(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right), \qquad G_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_1^{m}\left(\frac{1}{z}\right)^c,$$

basta hacer

$$f(z) = \sum_1^{\infty} F_0(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right);$$

en efecto, la función

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left[\frac{1}{z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)}\right]$$

es regular en la proximidad de cualquier punto z_0 diferente

de 0; y en la proximidad de este punto la función $\sum_1^\infty F_c(z)$ es regular

Para demostrar la segunda parte del teorema basta observar que la diferencia

$$f_1(z) - \sum_1^\infty F_c(z)$$

no tiene ningún punto crítico, y es igual, por tanto, á una función entera $\varphi(z)$.

NOTA

Productos de infinitos factores.

Suponiendo conocida por el lector la teoría elemental de los productos formados por un número infinito de factores, vamos á recordar aquí las proposiciones que hacen falta para la inteligencia de los teoremas de Weierstrass y Mittag-Leffler.

TEOREMA I.—*Para que el producto*

$$\prod_{1}^{\infty}(1+a_r)=(1+a_1)(1+a_2)\ldots,$$

en el cual $a_1, a_2, \ldots$ *son cantidades reales y positivas, sea convergente, es necesario y suficiente que sea convergente la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + \ldots$$

Esta condición es necesaria, porque el producto P_n de los n primeros factores del producto es mayor que la suma S_n de los n primeros términos de la serie, y si esta fuese divergente, la suma S_n podría llegar á ser mayor que cualquier número dado, y con mayor razón el producto P_n.

Además, la condición es suficiente, porque se tiene

$$1+a_1<e^{a_1}, \qquad 1+a_2<e^{a_2}, \ldots,$$

y, por consiguiente,

$$P_n < e^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < e^S,$$

si *lím.* $S_n = S$; ahora bien, como el producto P_n aumenta al crecer n, y permanece constantemente inferior á la cantidad determinada e^S, tenderá hacia un límite finito, y determinado P, luego es convergente.

TEOREMA II. — *Si* $A_1, A_2, \dots$ *son los módulos de los números complejos* $a_1, a_2, \dots$, *y el producto*

$$(1 + A_1)(1 + A_2)\dots$$

es convergente, el producto de factores imaginarios

$$\prod_1^{\infty}(1 + a_n) = (1 + a_1)(1 + a_2)\dots$$

es también convergente.

Observemos desde luego que el módulo de un factor imaginario $1 + a_n$ es menor que el factor real correspondiente $1 + A_n$, por tanto, si hacemos

$$P_n = (1 + A_1)(1 + A_2)\dots(1 + A_n),$$
$$Q_n = (1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n),$$

se tendrá

$$|\, Q_n \,| < P_n, \quad \text{y, por consiguiente,} \quad |\, Q_n \,| < lím.\, P_n = P,$$

luego $|\, Q_n \,|$ conserva un valor finito. Demostremos ahora que este producto es convergente: para ello se tiene

$$\frac{Q_{n+p}}{Q_n} - 1 = (1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2})\dots(1 + a_{n+p}) - 1$$
$$= a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} + a_{n+1} \cdot a_{n+2} + \dots;$$
$$\frac{P_{n+p}}{P_n} - 1 = (1 + A_1)(1 + A_2)\dots(1 + A_{n+p}) - 1$$
$$= A_{n+1} + A_{n+2} + \dots + A_{n+p} + A_{n+1} \cdot A_{n+2} + \dots,$$

de donde

$$\left|\frac{Q_{n+p}}{Q_n}-1\right|<\frac{P_{n+p}}{P_n}-1,$$

ó sea

$$\left|\frac{Q_{n+p}-Q_n}{Q_n}\right|<\frac{P_{n+p}-P_n}{P_n},$$

ó sea

$$|Q_{n+p}-Q_n|<|Q_n|\frac{P_{n+p}-P_n}{P_n}<P_{n+p}-P_n<P-P_n.$$

Se puede tomar n bastante grande para que la diferencia $P-P_n$ sea menor que una cantidad dada δ, y entonces se tiene, cualquiera que sea p,

$$|Q_{n+p}-Q_n|<\delta.$$

Si ahora concebimos que representamos en el plano las cantidades Q_n, Q_{n+1},...; todos los puntos que las representen estarán comprendidos en el interior del círculo descrito desde Q_n como centro y con un radio igual á δ. Si ahora determinamos un número $n'>n$ y razonamos como en el caso anterior, los puntos $Q_{n'}$, $Q_{n'+1}$,... estarán comprendidos en un círculo descrito desde $Q_{n'}$ como centro y con un radio $\delta'<\delta$; estando el centro de este círculo en el interior del primero y teniendo menor radio, estará todo él situado en el interior del primero, ó tendrá una parte común con él y otra exterior, en cuyo caso sólo consideraremos la parte común de los dos círculos, que será donde se encuentren los puntos $Q_{n'}$, $Q_{n'+1}$,... Continuando este razonamiento se ve con facilidad que los puntos representativos de los productos Q_{n+p} tienden hacia un punto bien determinado, punto límite Q, lo que prueba la convergencia del producto propuesto.

Definiciones.—Un producto de infinitos factores de la forma $(1+a_n)$ se dice que es ***absolutamente convergente***, si es convergente el producto correspondiente $\prod_1^\infty (1+|a_n|)$.

Los elementos a_n que figuran en los términos de un producto de infinitos factores, pueden ser funciones de una ó más variables; y si tal sucede se dice que el producto es ***uniformemente convergente*** para valores de su variable ó variables contenidos en el interior de un área dada, cuando se puede fijar un valor finito μ tal que para todo valor de $n < \mu$, $\left|\frac{Q_{n+p}}{Q_n}\right| < 1+\delta$, siendo δ un número tan pequeño como se quiera, cualquiera que sea el valor que se atribuya á la variable contenido en el área dada.

Consideremos un producto de la forma

$$\prod_1^\infty (1+f_n(z)) = [1+f_1(z)][1+f_2(z)]\ldots, \qquad (1)$$

en el cual suponemos que $f_1(z), f_2(z), \ldots$ son funciones uniformes y continuas en el interior de un cierto círculo *C*. Supongamos, además, que haciendo $|z| = \rho$, y representando de un modo general por $F_n(\rho)$ los términos de la serie obtenida reemplazando $f_n(z)$ por su módulo, la serie

$$F_1(\rho) + F_2(\rho) + \ldots + F_n(\rho) + \ldots,$$

es convergente cuando ρ es inferior al radio del círculo *C*. Vamos á demostrar que en estas hipótesis

El producto $\prod_1^\infty [1+f_n(z)]$ ***representa una función holomorfa de z en el interior del círculo*** C.

Consideremos desde luego el producto convergente

$$P(\rho) = [1+F_1(\rho)][1+F_2(\rho)]\ldots,$$

Sea $P_n(\rho)$ el producto de sus n primeros factores, efectuado

el producto podrá ponerse bajo la forma

$$P_n(\rho) = 1 + B_1^n\rho + B_2^n\rho^2 + \dots + B_m^n\rho^m + \dots,$$

siendo $B_1^n, B_2^n, \dots B_m^n \dots$ constantes positivas. $P_n(\rho)$ es evidentemente menor que $P(\rho)$; por consiguiente, todos sus términos, $B_m^n\rho^m$, son menores que $P(\rho)$; pero cuando n aumenta indefinidamente (supuesto fijo m), los coeficientes B_m^n aumentan, luego B_m^n para $n = \infty$ tiende hacia un límite que designaremos por B_m. Esto sentado, notemos que se tiene

$$P_n(\rho) > 1 + B_1^n\rho + \dots + B_m^n\rho^m,$$

no tomando más que m términos; por consiguiente, si m permanece fijo y n aumenta indefinidamente, $P(\rho)$ es, á lo menos, igual á

$$1 + B_1\rho + \dots + B_m\rho^m, \tag{2}$$

y como la suma de los m primeros términos de la serie anterior es menor que $P(\rho)$, esta serie es convergente y tiene por suma $P(\rho)$, ó un número inferior á este valor. Por otra parte, se tiene

$$P_n(\rho) < 1 + B_1\rho + \dots + B_m\rho^m + \dots < P(\rho),$$

lo que demuestra que la serie (2) tiene por límite $P(\rho)$.

Tomando el producto de los n primeros factores del producto (1), se tiene

$$Q_n(z) = 1 + b_1^n z + \dots + b_m^n z^m + \dots,$$

siendo los coeficientes $b_1^n, \dots b_m^n, \dots$ sumas de términos complejos; para $n = \infty$, cada uno de ellos es la suma de términos de una serie, en la cual la correspondiente de los módulos es convergente; por tanto, cada uno tenderá hacia un límite,

hagamos $lím.\ b_m^n = b_m$. La serie

$$\varphi(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_m z^m + \dots$$

será convergente sin duda alguna, y $\varphi(z)$ coincide con el valor $Q(z)$ del producto (1): lo que se ve en seguida notando que

$$|\ \varphi(z) - Q_n(z)\ | < P(\rho) - P_n(\rho);$$

y el segundo miembro de esta desigualdad tiende hacia cero Por consiguiente, el producto (1) se puede poner bajo la forma de una serie entera absoluta y uniformemente convergente en el círculo C, y, por tanto, la proposición queda demostrada.

INDICE

